

1111 MATH *misconcepts*

สรุป วิชาคณิตศาสตร์ O-NET

บทนำ

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์เล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อสรุปเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ไม่เพียงแต่สามารถใช้อ่านทบทวนความรู้แต่เพียงอย่างเดียว แต่สามารถนำความรู้ไปใช้ในการสอบแข่งขันเพื่อศึกษาต่อ หรือสอบเข้าเพื่อสมัครงาน ในตำแหน่งที่ต้องใช้คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานในการทำงานได้อีกด้วย

ทั้งนี้เอกสารเล่มนี้ ได้สกัดความรู้จากคณาจารย์ที่ได้ให้ความรู้ เพื่อนที่เรียนมหาวิทยาลัยด้วยกัน หนังสือเรียน เว็บไซต์ และประสบการณ์ของผู้เขียนเอง อาจมีบางประโยคที่ไม่เคยปรากฏที่ใดมาก่อน ซึ่งเป็นประโยคเพื่อให้ผู้เขียนในสื่อความหมายกับผู้เรียนได้ง่ายต่อการทำความเข้าใจยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณทุกท่านที่นำเอกสารเล่มนี้ไปใช้แล้วเกิดประโยชน์ หวังว่าถ้ามีข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไข ขอให้แนะนำได้ตลอด ผู้เขียนน้อมรับทุกคำแนะนำมาปรับปรุงและพัฒนาเอกสารนี้ต่อไป และขออภัยหากมีข้อผิดพลาดในเอกสารนี้ ขอขอบคุณครับ

ผู้จัดทำ

นายร่มเกล้า ช้างน้อย

สารบัญ

บทที่ 1 : เซต.....	1
ชนิดของเซต.....	2
เอกภพสัมพัทธ์.....	2
ความสัมพันธ์ระหว่างเซต.....	2
สับเซต.....	3
เพาเวอร์เซต.....	3
- สมบัติเกี่ยวกับสับเซต.....	3
- สมบัติของเพาเวอร์เซต.....	3
แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์.....	4
การดำเนินการของเซต.....	4
- ยูเนียน.....	4
- อินเตอร์เซกชัน.....	4
- คอมพลีเมนต์.....	4
- ผลต่างระหว่างเซต.....	5
- สมบัติบางประการเกี่ยวกับการปฏิบัติการทางเซต.....	5
จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด.....	6
บทที่ 2 : การให้เหตุผล.....	7
การให้เหตุผลแบบอุปนัย.....	7
การให้เหตุผลแบบนิรนัย.....	8
บทที่ 3 : จำนวนจริง.....	9
สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง.....	10
สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนจริง.....	10
การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง.....	10
- การแยกตัวประกอบของพหุนามด้วยวิธีการแจกแจง (ดึงตัวร่วม).....	10
- การแยกตัวประกอบของพหุนามในรูปผลต่างกำลังสอง.....	11
- การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$	11
- การแยกตัวประกอบโดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์.....	11
การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว.....	12

- หาคำตอบของสมการโดยวิธีใช้สูตร สำหรับสมการพหุนาม $ax^2 + bx + c = 0$	12
การไม่เท่ากัน	13
- สมบัติของการไม่เท่ากัน	14
- จงแก้สมการ	14
ค่าสัมบูรณ์	15
- การแก้สมการค่าสัมบูรณ์	15
- การแก้สมการค่าสัมบูรณ์	15
บทที่ 4 : เลขยกกำลัง	17
นิยามของเลขยกกำลัง	17
สมบัติของเลขยกกำลัง	17
บทที่ 5 : ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	18
คู่อันดับ	18
ผลคูณคาร์ทีเซียน	18
ความสัมพันธ์	19
โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	19
- การหาโดเมนและเรนจ์ ของความสัมพันธ์ที่มีขอบเขตเป็นจำนวนจริง	20
- การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ จากกราฟ	23
กราฟของความสัมพันธ์	24
อินเวอร์สของความสัมพันธ์	24
- การหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	26
ฟังก์ชัน	26
- การตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน	26
- การเขียนฟังก์ชัน	28
- การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน	28
- ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน	29
บทที่ 6 : อัตราส่วนตรีโกณมิติ	30
ตรีโกณมิติและทฤษฎีบทพีทาโกรัส	30
อัตราส่วนตรีโกณมิติ	30
ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ	31

การนำไปใช้	32
บทที่ 7 : ลำดับและอนุกรม	33
ลำดับเลขคณิต.....	34
- การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต	34
- ความสัมพันธ์เพิ่มเติมเกี่ยวกับลำดับเลขคณิต.....	35
ลำดับเรขาคณิต	35
- การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต.....	35
- ความสัมพันธ์เพิ่มเติมเกี่ยวกับลำดับเรขาคณิต	35
อนุกรม	36
บทที่ 8 : ความน่าจะเป็น.....	37
หลักการนับเบื้องต้น	37
ทฤษฎีความน่าจะเป็น	38
- สมบัติของความน่าจะเป็น.....	38
บทที่ 9 : สถิติเบื้องต้น	39
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสถิติ.....	39
การสร้างตารางแจกแจงความถี่จากรายขีด	40
ฮิสโตแกรม	40
แผนภาพต้นไม้ - ใบ.....	41
ตำแหน่งที่ของข้อมูล.....	41
- มัธยฐาน (Median).....	41
- ควอร์ไทล์ (Quartile).....	41
- เดไซล์ (Decile).....	42
- เปอร์เซนไทล์ (Percentile)	42
ค่ากลางของข้อมูลหรือมัธยัมเลขคณิต.....	43
- ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Mean)	43
- มัธยฐาน (Median).....	45
- ฐานนิยม (Mode)	45
- ข้อดี - ข้อเสีย - สมบัติบางประการของค่ากลางแต่ละตัว.....	46
การวัดการกระจายของข้อมูล.....	46

- พิสัย (range)	46
- ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation: S.D.).....	46
สมบัติสำคัญของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	46
ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความถี่ ค่ากลาง และการกระจาย	47
แผนภาพกล่อง.....	49
ข้อสอบ คณิตศาสตร์ O-NET 57	50
ข้อสอบ คณิตศาสตร์ O-NET 56	61

บทที่ 1 : เซต

“เซต” เป็นคำนิยาม เซตเทียบได้กับ “กล่อง”

ที่บอกได้ว่า “มีหรือไม่มีอะไรบางอย่างอยู่ข้างใน”
อาจจะรู้จากการเปิดดูเทียบได้กับการแจกแจงคือเห็น
ว่ามีสมาชิกเป็นตัวใดบ้าง



“สมาชิก” ก็คือสิ่งที่อยู่ในกล่อง

หรืออาจจะรู้จากการอ่านฉลากของกล่อง
เทียบได้กับการบอกเงื่อนไขคือยังไม่เห็นว่ามีสมาชิกเป็นตัวใดบ้าง

สิ่งที่เป็นเซต : “เซตของจำนวนตั้งแต่ 1-5” เพราะสามารถบอกได้ว่า “มีสมาชิก” คือ
หรืออาจเป็น “เซตของจำนวนนับไม่เกิน 6 ที่หารด้วย 2 ไม่ลงตัว” จึงทำให้เซตไม่มีชื่อตายตัว

: “แต้มลูกเต๋า ตั้งแต่ 7-10” เพราะสามารถบอกได้ว่า “ไม่มีสมาชิก”

สิ่งที่ไม่เป็นเซต : “พระอาทิตย์ขึ้นสวยงาม” หรือ “ร้องไห้หนักและนานมาก” เพราะบอกไม่ได้ว่า “มี” หรือ “ไม่มีสมาชิก”

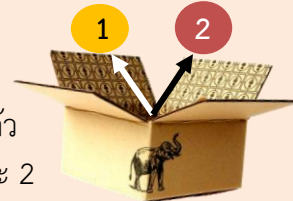
ในทางคณิตศาสตร์ เรามักใช้สัญลักษณ์ในการสื่อความหมายต่าง ๆ และการเขียนเซตก็เช่นกัน
เราจะมาทำความรู้จักกับสัญลักษณ์และประเภทของการเขียนเซตไปพร้อมกัน ดังนี้

1. “{ }” เครื่องหมายปีกกา แสดงความเป็นเซตหรือกล่องใส่สมาชิก และเซตแต่ละตัวจะมีชื่อเป็นอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น $A = \{1, 2\}$ นั่นคือ เซต A มีสมาชิกเป็น 1 และ 2

หรือถ้าใช้การมองให้เกิดภาพ

ก็ใช้ว่า กล่อง A เปิดมาแล้ว

จะเจอเลข 1 และ 2



เราเรียกการเขียนเซต $A = \{1, 2\}$ ว่าการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก นั่นคือ การมองเห็นในทันทีว่ามีสมาชิกเป็นตัวใดบ้าง

2. “|” เครื่องหมายโดยที่ แสดงการเป็นเงื่อนไขจะใช้สำหรับการเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข เช่น $A = \{(x, y) \mid y = 2x\}$
อ่านว่า “เซต A เท่ากับ เซตของคู่อันดับ x, y โดยที่ $y = 2x$ ”

3. “ $\in$ ” แทนคำว่าเป็นสมาชิกของหรืออยู่ใน อาจใช้ในกรณีการเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข เช่น

$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 2x\}$ อ่านว่า “เซต A เท่ากับ เซตของคู่อันดับ x, y เป็นสมาชิกของจำนวนนับโดยที่ $2x = y$ ”

หรืออาจใช้ในกรณีการบ่งบอกการเป็นสมาชิกเช่น กำหนด $A = \{1, 2\}$ แสดงว่า $1 \in A$ หรือ $2 \in A$ เป็นต้น ($\mathbb{N}$ คือ จำนวนนับ)

และเครื่องหมาย “ $\notin$ ” แทนคำว่าไม่เป็นสมาชิกของหรือไม่อยู่ใน เช่น $3 \notin A$

4. “...” เครื่องหมายจุด 3 จุด แสดงการไปเรื่อย ๆ เช่น $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ คือ 1, 2, 3 ไปเรื่อย ๆ จนถึง 10
หรือ $\{1, 2, 3, \dots\}$ คือ 1, 2, 3 ไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด

“ชนิดของเซต”

เซตที่สามารถบอกได้ว่ามีสมาชิกเท่าใดเรียกว่า “เซตจำกัด”

เซตที่ไม่สามารถระบุจำนวนสมาชิกที่แน่นอนได้เรียกว่า “เซตอนันต์”

และเซตที่ไม่มีสมาชิกเรียกว่า “เซตว่าง”



ตรวจสอบความเข้าใจโดยการพิจารณาเซตดังต่อไปนี้ว่าเป็นเซตจำกัด เซตว่าง และเซตอนันต์

เซต	จำนวนสมาชิก	ชนิดของเซต		
		เซตจำกัด	เซตว่าง	เซตอนันต์
$\{1, \{1, 2, 3, \dots\}\}$				
$\{0.1, 0.01, 0.001, \dots\}$				
$\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มลบที่มากกว่า } -1\}$				

ข้อควรระวังเกี่ยวกับเซตว่าง

$\{0\}$ และ $\{\}$ ไม่เหมือนกัน 	$\{\{\}$ และ $\{\}$ ไม่เหมือนกัน 	$\{\emptyset\}$ และ $\{\}$ ไม่เหมือนกัน
-------------------------------------	--------------------------------------	---

เอกภพสัมพัทธ์ (U)

เอกภพสัมพัทธ์คือ **ขอบเขต** ของสิ่งที่เราจะศึกษาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด โดยจะ **ไม่กล่าวถึงสิ่งอื่น** ที่นอกเหนือจากสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ เช่น $A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 2x\}$ เราจะไม่พูดถึงจำนวนที่เป็นลบ เป็นต้น

ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

เซตที่เท่ากัน คือเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และหน้าตาเหมือนกัน

แต่ถ้ามีแค่จำนวนสมาชิกที่เท่ากัน หน้าตาสมาชิกต่างกัน เราจะเรียกว่า **เซตที่เทียบเท่ากัน**

ตรวจสอบความเข้าใจโดยการพิจารณาเซตดังต่อไปนี้ว่าเป็นเซตในข้อใดบ้างที่เท่ากันหรือเทียบเท่ากัน

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

$$C = \{1, \{3\}, 5\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{I}^+ \mid x^2 - 6x + 5 = 0\}$$

$$E = \{x \mid (x-3)(x-5)(x-1) = 0\}$$

สับเซต คือ เซตย่อย

ตรวจสอบความเข้าใจโดยการเติมคำตอบลงในช่องว่าง

เซต	จำนวนสมาชิก	สับเซต	จำนวนสับเซต
{a}			
{1, 2}			
{1, 2, 5}			

สรุปได้ว่า ถ้า A เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก n ตัว จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A เท่ากับ สับเซต

สับเซตแท้ คือสับเซตทั้งหมดที่ไม่รวมตัวเอง

สมบัติเกี่ยวกับสับเซต

- $A \subset A$
- $\emptyset \subset A$
- $A \subset \mathcal{U}$
- $A \subset \emptyset$ แล้ว $A = \emptyset$
- เซตว่างไม่มีสับเซตแท้
- $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
- ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
- ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด และ $A \subset B$ แล้ว $n(A) \leq n(B)$
- ถ้าเซต A เป็นสับเซตแท้ของเซต B แล้ว $n(A) < n(B)$

เพาเวอร์เซต $P(A)$ คือ เซตของเซตย่อยที่เป็นไปได้ทั้งหมด

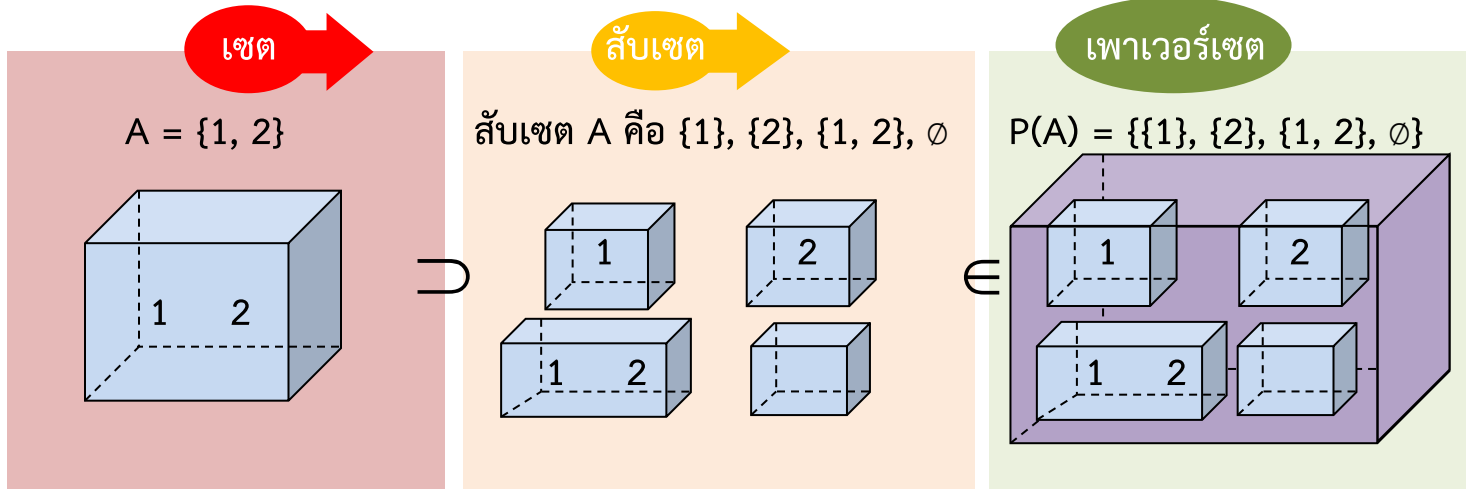
ตรวจสอบความเข้าใจโดยการเติมคำตอบลงในช่องว่าง

เซต	จำนวนสมาชิก	เพาเวอร์เซต	จำนวนสมาชิก
$\emptyset$			
$\{\emptyset\}$			
$\{1, \emptyset\}$			

สมบัติของเพาเวอร์เซต ถ้าให้ A และ B เป็นเซต เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็น $\mathcal{U}$

- $P(A) \neq \emptyset$
- $\emptyset \in P(A)$
- $A \in P(A)$
- ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
- ถ้า A เป็นเซตจำกัด ซึ่ง $n(A) = m$ แล้ว $n(P(A)) = 2^m =$ จำนวนสับเซตของ A

ภาพวิวัฒนาการของเซต สับเซต และ เพาเวอร์เซต



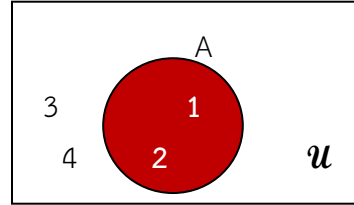
แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์

จะใช้ “วงกลม” แทน “เซต” และ

“กรอบสี่เหลี่ยม” แทน “เอกภพสัมพัทธ์”

เช่น $A = \{1, 2\}$ และ

$U = \{1, 2, 3, 4\}$

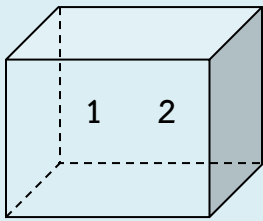


การดำเนินการของเซต

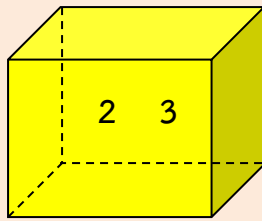
ยูเนียน ($\cup$) คือการนำสมาชิกของแต่ละเซตมา**รวม**อยู่ในเซตหรือกล่องใบเดียวกัน สมาชิกตัวไหน**ซ้ำ**ให้นับ**ยิบ**เหลือตัวเดียว

เช่น $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ และ $U = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหา $A \cup B$

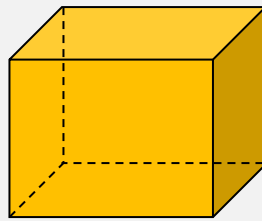
$A = \{1, 2\}$



$B = \{2, 3\}$



$A \cup B =$



หรือ

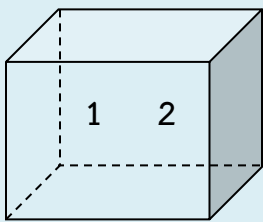
$A \cup B =$



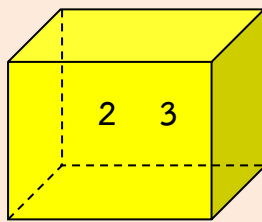
อินเตอร์เซกชัน ($\cap$) คือการสนใจสมาชิกตัวที่**ซ้ำ**กัน หรือเหมือนกัน ให้มาอยู่เซตหรือกล่องใบเดียวกัน

เช่น $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ และ $U = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหา $A \cap B$

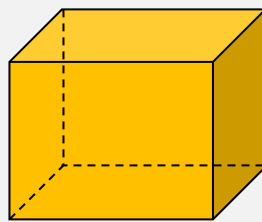
$A = \{1, 2\}$



$B = \{2, 3\}$



$A \cap B =$



หรือ

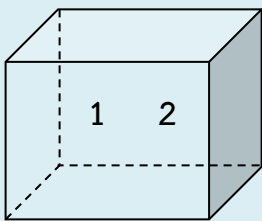
$A \cap B =$



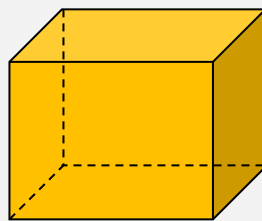
คอมพลีเมนต์ ($'$) คือเครื่องหมายที่ไปปรากฏบนเซตใดจะ**ไม่สนใจ** ไม่นับ ไม่เอาเซตเซตนั้น

เช่น $A = \{1, 2\}$ และ $U = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหา A'

$A = \{1, 2\}$



$A' =$



หรือ

$A' =$

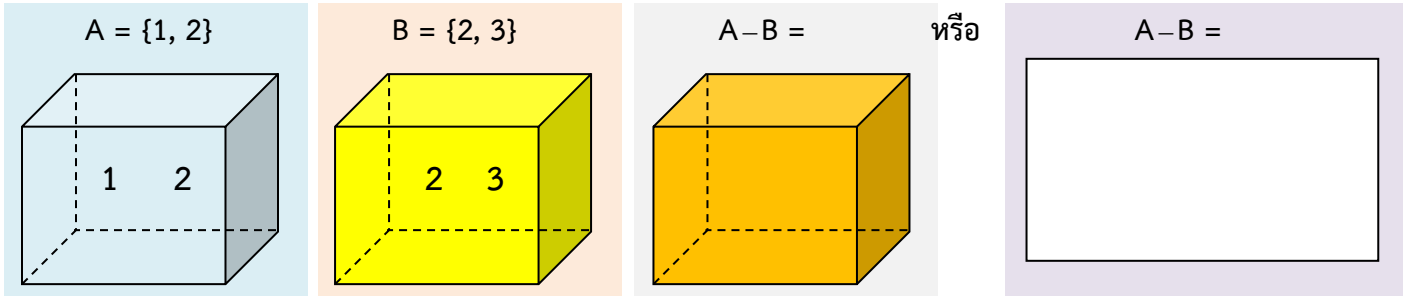


สมบัติของคอมพลิเมนต์

1. $(A')' = A$
2. $\emptyset' = U$
3. $U' = \emptyset$
4. $A \cup A' = U$
5. $A' \cap A = \emptyset$
6. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
7. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De Morgan's Law)
8. $B' \subset A'$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$
9. $A \cap B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B'$

ผลต่างระหว่างเซต (—) มีความหมายว่า ถ้ากำหนด $A - B$ นั่นคือ มีสมาชิกในเซต A แต่ ไม่มีในเซต B

เช่น $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ และ $U = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหา $A - B$



สมบัติของผลต่างระหว่างเซต

1. $A - B = A \cap B'$
2. $A - B \subset A$
3. $A - B = A$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \emptyset$
4. $A - A = \emptyset$
5. $U - A = A'$
6. $A - U = \emptyset$
7. $A - \emptyset = A$
8. $A' - B' = B - A$
9. $A - (B - A) = A$
10. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
11. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
12. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

สมบัติบางประการเกี่ยวกับการปฏิบัติการทางเซต

1. กฎการสลับที่

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$
2. กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
3. กฎการแจกแจง

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
4. กฎเอกลักษณ์

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup U = U \quad A \cap U = A$$
5. กฎการซ้ำ

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$
6. กฎของคอมพลิเมนต์

$$A \cup A' = U \quad A \cap A' = \emptyset \quad \emptyset' = U \quad U' = \emptyset \quad (A')' = A \quad A - B = A \cap B'$$
7. กฎของเดอร์มอร์กอง

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A ใด ๆ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n(A)$ เช่น

$$A = \{1, 2\}$$

$$n(A) =$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$n(B) =$$

$$A \cup B =$$

$$n(A \cup B) =$$

หรือ

$$U =$$

$$n(U) =$$

นอกจากจะหาจำนวนสมาชิกของเซตได้โดยการนับแล้ว ยังสามารถทำได้โดยใช้หลักเกณฑ์ต่อไปนี้

ถ้าเซต A เซต B และ เซต C เป็นเซตจำกัด สามารถหาสมาชิกได้จาก

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{สำหรับ 2 เซต}$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad \text{สำหรับ 3 เซต}$$

เช่น กำหนด $n(A) = 40$, $n(B) = 32$, $n(A \cap B) = 14$ จงหา $n(A \cup B)$

เช่น กำหนด $n(A) = 25$, $n(B) = 31$, $n(C) = 14$, $n(A \cap B) = 6$, $n(A \cap C) = 5$, $n(B \cap C) = 10$ และ $n(A \cup B \cup C) = 49$ จงหา $n(A \cap B \cap C)$

บทที่ 2 : การให้เหตุผล

การให้เหตุผลคือการนำข้อความ หรือข้อกำหนดมา **วิเคราะห์** โดยเป็นการฝึกที่ยังไม่สนใจความเป็นจริง เพื่อพัฒนาทักษะในการให้เหตุผล ซึ่งจะทำให้เกิด **ข้อความใหม่** ที่เรียกว่า **ข้อสรุป** หรือ **ผล**

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมีอยู่ 2 วิธี ได้แก่ การให้เหตุผลแบบ **“อุปนัย”** และ **“นิรนัย”**

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

คือ วิธีการสรุปผลในการค้นหาความจริงจากการ **สังเกต** หรือการ **ทดลองหลายครั้ง** จากกรณีย่อย ๆ แล้วนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป

ตัวอย่าง การให้เหตุผลแบบอุปนัย

ตัวอย่างที่ 1 ญาญ่าพบว่า ทุกคืนที่ฝนตกจะมองไม่เห็นดาว จึงสรุปว่าจะมองไม่เห็นดาวในคืนฝนตก



ตัวอย่างที่ 2 แอนเป็นแม่ค้าทำเค้กส่งขาย สังเกตเห็นว่า ทุกครั้งที่ส่งเค้กขาย เค้กช็อกโกแลตจะขายหมดก่อนเป็นอันดับแรก จึงสรุปว่าเค้กช็อกโกแลตขายดีที่สุด



ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า a ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) 10, 12, 14, 16, a

$a = \dots\dots\dots$

2) 7, 4, 1, -2, -5, a

$a = \dots\dots\dots$

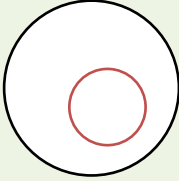
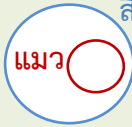
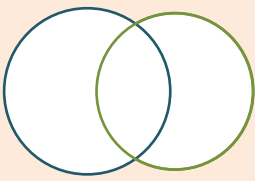
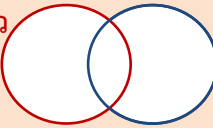
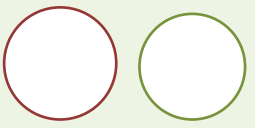
3) $1 + 2 + 3 + \dots + 1,000 = a$

$a = \dots\dots\dots$

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

เป็นการนำความรู้พื้นฐานซึ่งอาจเป็น **ความเชื่อ** ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อนและยอมรับว่า **เป็นจริง** เพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป

ในการให้เหตุผลแบบนิรนัย จะใช้แผนภาพของเวนน-ออยเลอร์ มาเป็นเครื่องมือในการให้เหตุผล โดยมีลักษณะในการใช้งาน

ถ้าพบคำว่า “เป็น” “ทุก” “ต้อง” “อยู่ใน” “คือ” ฯลฯ (รูปจะซ้อนกัน)		เช่น <u>แมวทุกตัวมีสี่ขา</u> สี่ขา (ส่วนใหญ่อะไรที่อยู่หลังคำว่า “ทุก” จะเป็นวงนอก) แมว 
ถ้าพบคำว่า “บาง” “และ” (รูปจะเหลื่อมกัน)		เช่น <u>แมวบางตัวบินได้</u> แมว 
ถ้าพบคำว่า “ไม่” “ไม่มี” (รูปจะแยกกัน)		เช่น <u>ไม่มีแมวตัวใดบินได้</u> แมว 
ถ้าเป็น “สิ่งเดียว” “คนเดียว” “ตัวเดียว” (จะใช้จุด)		เช่น <u>ครูก็กกก็มีสี่ขา</u> สี่ขา ครูก็กก 

“สำคัญที่สุดคือ เวลาตรวจสอบความสมเหตุสมผล ให้วาดรูปจากเหตุเท่านั้น ส่วนผลมีไว้ตรวจสอบ”

ตัวอย่างที่ 1 จงตรวจสอบข้อความว่า สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1) แมวทุกตัวเลี้ยงลูกด้วยนม
2) สัตว์เลี้ยงลูกด้วยนมทุกตัวมีหัวใจ
ผล แมวทุกตัวมีหัวใจ

ตัวอย่างที่ 2 จงเติมข้อความให้สมบูรณ์

สมมติฐาน (1) คนทำดีบางคนได้ดี
(2) คนได้ดีทุกคนร่ำรวย
(3) คนทำดีทุกคนร่ำรวย

ข้อสรุป

เหตุ 1) ปลาทุกตัวว่ายน้ำได้
2) เป็ดทุกตัวว่ายน้ำได้
ผล เป็ดทุกตัวเป็นปลา

สมมติฐาน (1) ดาวทุกดวงอยู่บนท้องฟ้า
(2)

ข้อสรุป ดาวหางอยู่บนท้องฟ้า

บทที่ 3 : จำนวนจริง

จำนวนจริง

จำนวนอตรรกยะ คือจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ



Richard Dedekind, 1831-1916

จำนวนตรรกยะ (เขียนในรูป $\frac{a}{b}$ ได้โดย a กับ b เป็นจำนวนเต็ม และ b ต้องไม่เป็นศูนย์)

จำนวนเต็ม

- ▷ จำนวนเต็มลบ {...,-3,-2,-1}
- ▷ จำนวนเต็มศูนย์ {0}
- ▷ จำนวนเต็มบวกหรือจำนวนนับ {1,2,3,...}
- ▷ จำนวนเฉพาะ {2,3,5,7,11,...}

ไม่ใช่จำนวนเต็ม (เศษส่วน,ทศนิยม)
(ทศนิยมรู้จบและทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำ)

ตัวอย่าง ระบุจำนวนต่อไปนี้ลงในแผนภาพแสดงเซตของจำนวนจริงชนิดต่าง ๆ

1. $\sqrt{1} + \sqrt{4} - \sqrt{9}$	2. $\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)$	3. $8\sqrt{8} - \sqrt{2} - 6\sqrt{8} + 3\sqrt{2}$
4. 4.12112111211112...	5. 1.99999...	6. $(-111)^{111}$
7. $(-111)^{-111}$	8. $[(-15) + (-14) + (-13) + \dots + 13 + 14 + 15]^0$	9. รากของสมการ $x^2 = 7$

จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม			จำนวนอตรรกยะ
จำนวนเต็มลบ	ศูนย์	จำนวนเต็มบวก	ไม่ใช่ทั้งหมด

สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

ชื่อสมบัติ	สมบัติของการเท่ากัน ให้ $a, b, c \in R$
สมบัติสะท้อน	$a = a$
สมบัติสมมาตร	ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
สมมติการถ่ายทอด	ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
สมบัติการแทนที่	ถ้า $a = b$ เราอาจจะแทนค่าของ a ด้วย b ได้โดยไม่ทำให้ค่าความจริงเปลี่ยนไป
สมบัติการเพิ่มเข้าสำหรับการบวก	ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
สมบัติการเพิ่มเข้าสำหรับการคูณ	ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนจริง

ชื่อสมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	$a + b \in R$	$ab \in R$
สมบัติการสลับที่	$a + b = b + a$	$ab = ba$
สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
เอกลักษณ์	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
อินเวอร์ส	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = a \cdot \frac{1}{a}$

สมบัติการแจกแจง (Distributive Property): ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริง แล้ว $a(b + c) = ab + ac$

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง (มีความหมายต่าง ๆ ที่ต้องเข้าใจตรงกันดังนี้)

ตัวแปร (Variable)	สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวน นิยมเขียนด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก เช่น x, y, z
ค่าคงตัว (Constants)	ตัวเลขที่ใช้แทนจำนวน 1, 2, 3
นิพจน์	ข้อความในรูปสัญลักษณ์และค่าคงตัว
เอกนาม (Monomial)	นิพจน์ที่เขียนให้อยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไปที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์
พหุนาม (Polynomial)	นิพจน์ที่สามารถเขียนในรูปของเอกนามหรือการบวกของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป
ดีกรีของเอกนาม	ผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปรในเอกนาม
ดีกรีของพหุนาม	ดีกรีสูงสุดของเอกนามในพหุนามนั้น
การแยกตัวประกอบของพหุนาม	คือการเขียนพหุนามให้อยู่ในรูปผลของพหุนามที่มีดีกริต่ำกว่า

การแยกตัวประกอบนั้นประกอบไปด้วยวิธีต่าง ๆ ดังนี้

1) การแยกตัวประกอบของพหุนามด้วยวิธีการแจกแจง (ดึงตัวร่วม)

$$12x + 6 =$$

$$9ax + 18a =$$

$$18x^3y^2 - 9x^2y^2 =$$

$$18(3x - 4)^2 - 12x(4 - 3x) =$$

2) การแยกตัวประกอบของพหุนามในรูปผลต่างกำลังสอง สูตร : $n^2 - l^2 = (n-l)(n+l)$

$$4 - x^2 =$$

$$2x^2 - 18 =$$

$$9x^2 - 16y^2 =$$

$$(x-2)^2 - 9y^2 =$$

3) การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูป

(ถ้าหน้า x^2 เป็นบวกและเป็น 1 ให้ใช้หลักการ อะไรคูณกันได้ตัวท้าย บวกกันได้ตัวกลาง)

$$x^2 + 7x + 6 =$$

$$x^2 + 5x - 36 =$$

$$x^2 - 4x - 21 =$$

$$x^2 - 2x - 24 =$$

$$6x^2 - 35x + 36 =$$

$$12x^2 + 25x + 12 =$$

$$3x^2 + 10x - 8 =$$

$$5x^2 - 33x - 14 =$$

4) การแยกตัวประกอบโดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

สูตร : $(n+l)^2 = n^2 + 2nl + l^2$, $(n-l)^2 = n^2 - 2nl + l^2$

$$x^2 - 10x + 7 =$$

$$8 + 4x - x^2 =$$

$$9x^2 - 90x + 7 =$$

การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว (นำความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบมาใช้)

จงหาคำตอบของสมการ

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$3x^2 - 11x - 4 = 0$$

$$x^2 + 6x + 4 = 0$$

หาคำตอบของสมการโดยวิธีใช้สูตร สำหรับสมการพหุนาม $ax^2 + bx + c = 0$

ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนจริง a, b, c ซึ่ง $a \neq 0$ ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ และ $b^2 - 4ac \geq 0$ แล้ว $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ถ้า $b^2 - 4a > 0$ แล้ว คำตอบของสมการจะเป็นจำนวนจริงทั้งสองคำตอบ นั่นคือ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ถ้า $b^2 - 4a = 0$ แล้ว คำตอบของสมการจะเป็นจำนวนจริงเพียงคำตอบเดียว นั่นคือ $\frac{-b}{2a}$

ถ้า $b^2 - 4a < 0$ แล้ว คำตอบของสมการจะไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

จงหาคำตอบของสมการ

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$2x^2 = x - 2$$

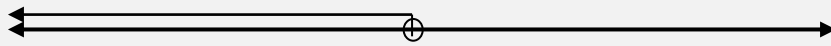
การไม่เท่ากัน

กฎไตรวิภาค ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ a, b จะสอดคล้องกับข้อความอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้เท่านั้น

- | | | |
|---------------------|-----------------------|---------|
| 1. a มากกว่า b | เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ | $a > b$ |
| 2. a เท่ากับ b | เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ | $a = b$ |
| 3. a น้อยกว่า b | เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ | $a < b$ |

เส้นจำนวน

เราสามารถเรียงจุดทั้งหมดให้กลายเป็นเส้นตรงได้ เรียกว่า **เส้นจำนวน** โดยเราจะยึดหลักว่า จุดที่อยู่ทาง **ซ้ายมือจะแทนจำนวนที่น้อยกว่า** และ **จำนวนที่แทนด้วยจุดทางขวามือ** หัวลูกศรตรงปลายของเส้นจำนวนจะ **แสดงความไม่สิ้นสุด** ของจำนวนในทั้งสองทิศทาง เช่น



จากรูป ถ้าเราให้ a เป็นจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง เราพบว่า จุดทั้งหลายที่อยู่ทางซ้ายมือของ a จะแสดงจำนวนทั้งหมดที่น้อยกว่า a ประโยคที่ว่า **“จำนวนจริงทั้งหมดที่น้อยกว่า a ”** จะแสดงได้ด้วยเซต $\{x | x < a\}$ หรืออาจแทนด้วยอสมการ $x < a$ ในการแสดงความไม่เท่ากันด้วยเส้นจำนวน สังเกตว่าเราจะใช้สัญลักษณ์ $\circ$ เพื่อแทนการไม่นับรวมจำนวนจริง a แต่ถ้าเป็น **การนับรวมจำนวน** จะใช้สัญลักษณ์ $\bullet$

นอกจากนั้น เรายังสร้างเซตของจำนวนในลักษณะทำนองเดียวกันนี้ ได้ถึง 8 รูปแบบ ดังนี้

[1] อสมการ: $x < a$ กราฟ ความหมาย..... ช่วง.....	[2] อสมการ: $x > a$ กราฟ ความหมาย..... ช่วง.....
[3] อสมการ: $x \leq a$ กราฟ ความหมาย..... ช่วง.....	[4] อสมการ: $x \geq a$ กราฟ ความหมาย..... ช่วง.....
[5] อสมการ: $a < x < b$ กราฟ ความหมาย..... ช่วง.....	[6] อสมการ: $a \leq x < b$ กราฟ ความหมาย..... ช่วง.....
[7] อสมการ: $a < x \leq b$ กราฟ ความหมาย..... ช่วง.....	[8] อสมการ: $a \leq x \leq b$ กราฟ ความหมาย..... ช่วง.....
เราจะสามารถเขียนความหมาย กราฟ เซตคำตอบ และช่วงคำตอบของอสมการ $x \neq a$ ได้อย่างไร	

สมบัติของการไม่เท่ากัน

ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
2. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
3. สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากันที่มากกว่าศูนย์ ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
4. สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากันที่น้อยกว่าศูนย์ ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

จงแก้สมการ

$$x + 6 < 10 - 4x$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x > \frac{1}{7}x + \frac{11}{14}$$

$$3\frac{1}{2}x - 10 \geq \frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}x$$

$$-7 \leq -2x - 5 < 9$$

พิจารณาเครื่องหมายของอสมการว่าเป็นเครื่องหมายใด โดยพิจารณาจากโจทย์ และอาศัยหลักการของจำนวนจริงดังนี้

ประโยคสัญลักษณ์	ความหมาย
$(x + a)(x + b) < 0$	ไม่ $(x + a)$ ก็ $(x + b)$ ตัวใดตัวหนึ่งต้องเป็นลบ(น้อยกว่า 0)
$(x + a)(x + b) > 0$	ทั้งสองวงเล็บ ถ้าไม่เป็นลบทั้งคู่ ก็เป็นบวกทั้งคู่ (มากกว่า 0)
$(x + a)(x + b) \leq 0$	ไม่ $(x + a)$ ก็ $(x + b)$ ตัวใดตัวหนึ่งต้องเป็นลบหรือ 0 (น้อยกว่าหรือเท่ากับ 0)
$(x + a)(x + b) \geq 0$	ทั้งสองวงเล็บ ถ้าไม่เป็นลบทั้งคู่ บวกทั้งคู่ หรือไม่ก็ 0 (มากกว่าหรือเท่ากับ 0)
$(x + a)(x + b) \neq 0$	ทั้งสองวงเล็บ ต้องไม่เป็น 0

(ถ้าพบว่าคำว่า หรือ ให้นำเซตคำตอบมายูเนียนกัน และถ้าพบคำว่า และ ให้นำเซตคำตอบมาอินเตอร์เซกชันกัน)

จงหาช่วงคำตอบของอสมการ

$$x^2 - 7x + 12 > 0$$

$$3x^2 - 4x - 32 \leq 0$$

$$8x^2 + 2x - 3 \neq 0$$

$$8x^2 + 2x - 3 < 0$$

ค่าสัมบูรณ์

นิยาม ให้ $a \in R$ เราจะกล่าวว่า “ค่าสัมบูรณ์ของ a ” (เขียนแทนด้วย $|a|$) คือระยะห่างระหว่าง 0 ถึง a

ตัวอย่าง $|2|$ อ่านว่า ค่าสัมบูรณ์ของ 2 หมายความว่า ระยะห่างระหว่าง 0 ถึง 2 ทำให้ได้ว่า $|2| = 2$

$|-2|$ อ่านว่า ค่าสัมบูรณ์ของ -2 หมายความว่า ระยะห่างระหว่าง 0 ถึง -2 ทำให้ได้ว่า $|-2| = 2$

จากตัวอย่างข้างต้น ทำให้ทราบว่า ถ้า $a \in R$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ จงหาค่าของ

$$\frac{|-5| - 2 \cdot |5|}{5} =$$

$$\frac{1}{-|10|} - \left| -\frac{1}{10} \right| =$$

$$|-10| + |-9| + |-8| + \cdots + |8| + |9| + |10| =$$

$$(-2)^{-|-10|} =$$

จงแก้สมการ

$$|x + 7| = 1$$

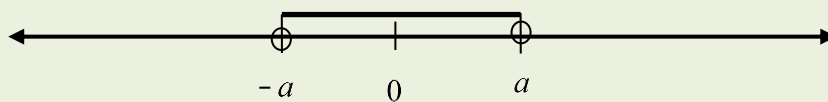
$$|3x - 2| = 8$$

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ ให้ $a, x \in R$

เนื่องจาก $|x|$ หมายถึง ระยะห่างระหว่าง 0 ถึง x แสดงว่า **ประโยคสัญลักษณ์ $|x| < a$**

จะหมายถึง ระยะห่างระหว่าง 0 ถึง x มีค่าน้อยกว่า a

ดังนั้น ถ้ากำหนดค่า a และ $-a$ บนเส้นจำนวน ดังนี้



เราก็จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า บรรดาจำนวนจริงที่มีค่าสัมบูรณ์น้อยกว่า a ก็คือบรรดาจำนวนที่อยู่ระหว่าง a กับ $-a$ นั่นเอง กล่าวคือ

$$|x| < a \text{ มีความหมายเหมือนกับ } -a < x < a$$

$$|x| \leq a \text{ มีความหมายเหมือนกับ } -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \text{ มีความหมายเหมือนกับ } x < -a \text{ หรือ } x > a$$

$$|x| \geq a \text{ มีความหมายเหมือนกับ } x \leq -a \text{ หรือ } x \geq a$$

จงแก้สมการ

$$|4x+3|\leq 3$$

$$|4x+1|>11$$

$$|8x-3|\neq 11$$

บทที่ 4 : เลขยกกำลัง

นิยามของเลขยกกำลัง

ให้ a แทนจำนวนใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่า $a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$ ทั้งหมด n ตัว
เมื่อ a คือฐานและ n คือ เลขชี้กำลัง

สมบัติของเลขยกกำลัง

เมื่อกำหนดให้ a, b เป็นจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $5^9 \times 5^7 =$	2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; a \neq 0$ $\frac{5^7}{5^9} =$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$ $(5^9)^7 =$	4. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m; b \neq 0$ $\frac{10^3}{2^3} =$
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a \neq 0$ $5^{-2} =$	6. $a^0 = 1; a \neq 0$ $1.56^0 =$
7. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; a \geq 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ $\sqrt[3]{8^2} =$	8. $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ $2^7 \times 5^7 =$
9. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ หรือ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; b \neq 0$ $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{200} =$	10. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} =$
11. ถ้า $a^m = a^n$ แล้วจะได้ $m = n$ โดยที่ $a \neq 0, 1$ $2^{25} = 2^{4x+1}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด	12. ถ้า $a^m = b^m$ แล้วจะได้ $m = 0$ โดยที่ $a, b \neq 0, 1$ $5^0 = 10^0$

กรณีที่ควรระวังเช่น

$$2^{3^2} \neq (2^3)^2$$

$$(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2$$

$$2^3 \neq 2(3)$$

$$-2^2 \neq (-2)^2$$

รูปแบบสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

รูปแบบ $a \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq a < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

เช่น $4,000,000 =$

$750,000 =$

เลื่อนจุดเดินหน้าเป็นบวก

$0.0007 =$

$0.0000026 =$

เลื่อนจุดถอยหลังเป็นลบ

บทที่ 5 : ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน



ความสัมพันธ์

“คู่อันดับ (a, b)”

เป็นการจับคู่ระหว่างสองสิ่งที่มีความสัมพันธ์กัน โดยที่ a คือสมาชิกตัวหน้า และ b คือ สมาชิก ตัวหลัง
ทั้งนี้ หากสลับที่ สมาชิกตัวหน้าและตัวหลัง จะทำให้ลำดับของความสัมพันธ์ในคู่อันดับผิดไป เช่น $(2, 3) \neq (3, 2)$

***** [คู่อันดับ $(a, b) =$ คู่อันดับ (c, d) ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$] *****

จงหาค่า x, y จากตัวอย่างที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $(3, 5) = (x, y)$

ตอบ

2. $(x - 2, 8) = (10, y + 3)$

ตอบ

3. $(3x - 5, 4y + 2) = (2x - 10, 6y - 14)$

ตอบ

“ผลคูณคาร์ทีเซียน”

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A กับเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$ คือ เซตของคู่อันดับที่มี

“สมาชิกตัวหน้ามาจากเซต A และสมาชิกตัวหลังมาจากเซต B” โดยทั่วไปแล้ว $A \times B \neq B \times A$

จงหาผลคูณคาร์ทีเซียนจากเซตที่กำหนดให้ $A = \{5, 6\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{8\}$

$A \times B =$

$B \times B =$

$C \times A =$

$(A \times B) \times C =$

$(B \times C) \times C =$

$(C \times A) \times C =$

“ความสัมพันธ์ (relation : r)” เซตของคู่อันดับที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ต้องการจากผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 4\}$ จงหา

1) $A \times B$

ตอบ

2) r_1 เป็นความสัมพันธ์แบบ มากกว่า จาก A ไป B

ตอบ

3) r_2 เป็นความสัมพันธ์แบบ น้อยกว่าอยู่ 1 จาก A ไป B

ตอบ

4) r_3 เป็นความสัมพันธ์แบบ มากกว่าอยู่ 2 จาก A ไป B

ตอบ

5) $r = \{(x, y) \in B \times A \mid y - 2 = x + 1\}$

ตอบ

6) $r = \{(x, y) \in B \times A \mid x = y^2\}$

ตอบ

7) $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x^2 = y\}$

ตอบ

8) $r = \{(x, y) \in A \times A \mid 3x = 7y\}$

ตอบ

“โดเมน(D_r)และเรนจ์(R_r) ของความสัมพันธ์(r)”

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน $r : D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน $r : R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

การพิจารณาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์จากกราฟของความสัมพันธ์ โดยพิจารณาโดเมนจากค่าของ x ในกราฟ และพิจารณาเรนจ์จากค่าของ y ในกราฟ

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $r = \{(6, 5), (4, 2), (6, 4), (5, 1)\}$

$D_r = \dots\dots\dots R_r = \dots\dots\dots$

2. $r = \{(f, n), (-k, y), (e, a), (w^3, p)\}$

$D_r = \dots\dots\dots R_r = \dots\dots\dots$

3. $r = \{(x + p, 2), (a, w^{10}), (y, fg), (hk, 1)\}$

$D_r = \dots\dots\dots R_r = \dots\dots\dots$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{-1, 0, 1, \dots, 8\}$

4. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid 3x - 1 = y\}$ $D_r = \dots\dots\dots R_r = \dots\dots\dots$

5. $r = \{(x, y) \in B \times A \mid x^3 = y^2\}$ $D_r = \dots\dots\dots R_r = \dots\dots\dots$

“การหาโดเมนและเรนจ์ ของความสัมพันธ์ที่มีขอบเขตเป็นจำนวนจริง (R)”

การหาโดเมน คือการสนใจที่คู่อันดับ**ตัวหน้า** และการที่เราสนใจสิ่งใด เราจะใช้คำว่า **“เทอม”** กับตัวนั้น และใช้คำว่า **“จัด”** กับสิ่งที่เรายังไม่สนใจ

เช่น $r = \{(x, y) \mid y - 2 = x + 5\}$

ถ้าต้องการหาโดเมน แสดงว่าเราต้องสนใจคู่อันดับตัวหน้าคือ x นั่นคือเราจะ **“จัด y เทอม x ”**

หมายความว่า **ทำให้ y อยู่ตัวเดียว จะพิจารณา x** คือ $y = x + 5 + 2$

($y =$ ก่อน ๆ หนึ่งที่มี x) $y = x + 7$ และเราจะพิจารณาฝั่งที่มี x คือ $x + 7$

หรือ $r = \{(b, a) \mid b + 1 = a - 2\}$

ถ้าต้องการหาโดเมน แสดงว่าเราต้องสนใจคู่อันดับตัวหน้าคือ b นั่นคือเราจะ **“จัด a เทอม b ”**

หมายความว่า **ทำให้ a อยู่ตัวเดียว จะพิจารณา b** คือ $a = b + 1 + 2$

($a =$ ก่อน ๆ หนึ่งที่มี b) $a = b + 3$ และเราจะพิจารณาฝั่งที่มี b คือ $b + 3$

การหาเรนจ์ คือการสนใจที่คู่อันดับ**ตัวหลัง** และการที่เราสนใจสิ่งใด เราจะใช้คำว่า **“เทอม”** กับตัวนั้น และใช้คำว่า **“จัด”** กับสิ่งที่เรายังไม่สนใจ

เช่น $r = \{(x, y) \mid y - 2 = x + 5\}$

ถ้าต้องการหาเรนจ์ แสดงว่าเราต้องสนใจคู่อันดับตัวหลังคือ y นั่นคือเราจะ **“จัด x เทอม y ”**

หมายความว่า **ทำให้ x อยู่ตัวเดียว จะพิจารณา y** คือ $x = y - 2 - 5$

($x =$ ก่อน ๆ หนึ่งที่มี y) $x = y - 7$ และเราจะพิจารณาฝั่งที่มี y คือ $y - 7$

หรือ $r = \{(b, a) \mid b + 1 = a - 2\}$

ถ้าต้องการหาเรนจ์ แสดงว่าเราต้องสนใจคู่อันดับตัวหลังคือ a นั่นคือเราจะ **“จัด b เทอม a ”**

หมายความว่า **ทำให้ b อยู่ตัวเดียว จะพิจารณา a** คือ $b = a - 2 - 1$

($b =$ ก่อน ๆ หนึ่งที่มี a) $b = a - 3$ และเราจะพิจารณาฝั่งที่มี a คือ $a - 3$

จงบอกว่าถ้าต้องการหาโดเมนและเรนจ์ จะต้องจัดอะไรเทอมอะไร

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $r = \{(x, y) \mid x = 2y\}$ | หาโดเมน จัด.....เทอม..... และถ้าต้องการหาเรนจ์ จัด.....เทอม..... |
| 2. $r = \{(y, x) \mid x = 2y\}$ | หาโดเมน จัด.....เทอม..... และถ้าต้องการหาเรนจ์ จัด.....เทอม..... |
| 3. $r = \{(m, n) \mid m + n = 4\}$ | หาโดเมน จัด.....เทอม..... และถ้าต้องการหาเรนจ์ จัด.....เทอม..... |
| 4. $r = \{(r, t) \mid 2t = -r\}$ | หาโดเมน จัด.....เทอม..... และถ้าต้องการหาเรนจ์ จัด.....เทอม..... |
| 5. $r = \{(e, w) \mid e + 3w = -1\}$ | หาโดเมน จัด.....เทอม..... และถ้าต้องการหาเรนจ์ จัด.....เทอม..... |

เมื่อจัดทอมนของโดเมนและเรนจ์ได้แล้ว จะต้องม **เงื่อนไข** ที่ต้องทำควมเข้าใจ **5 ข้อ** ดังนี้

1. ถ้าตัวใดก็ตาม **“เป็นตั่วน”** ของเศษส่วน ตัว ๆ นั้นจะ **“ไม่เท่ากับศูนย์”**

เช่น $x = \frac{1}{y}$ จะเห็นว่า y เป็นตั่วน ดังนั้น $y \neq 0$

หรือ $y - 5 = \frac{20}{2x - 1}$ จะเห็นว่า $2x - 1$ เป็นตั่วน ดังนั้น $2x - 1 \neq 0$

2. ถ้าตัวใดก็ตาม **“ไปเท่ากับ กำลังสอง”** ตัว ๆ นั้น จะ **“มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์”**

เช่น $x = y^2$ จะเห็นว่า x ไปเท่ากับตัวที่เป็นกำลังสอง ดังนั้น $x \geq 0$

หรือ $y + 2 = (x - 5)^2$ จะเห็นว่า $y + 2$ ไปเท่ากับตัวที่เป็นกำลังสอง ดังนั้น $y + 2 \geq 0$

3. ถ้าตัวใดก็ตาม **“ไปเท่ากับ ค่าสัมบูรณ์”** ตัว ๆ นั้น จะ **“มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์”**

เช่น $x = |y|$ จะเห็นว่า x ไปเท่ากับตัวที่เป็นกำลังสอง ดังนั้น $x \geq 0$

หรือ $y + 2 = |x - 5|$ จะเห็นว่า $y + 2$ ไปเท่ากับตัวที่เป็นกำลังสอง ดังนั้น $y + 2 \geq 0$

4. ถ้าตัวใดก็ตาม **“ไปเท่ากับ รากคู่ และอยู่ในรากคู่”** ตัว ๆ นั้น จะ **“มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์”**

เช่น $x = \sqrt{y}$ จะเห็นว่า x ไปเท่ากับตัวรากคู่ ดังนั้น $x \geq 0$

จะเห็นว่า y ไปอยู่ในรากคู่ ดังนั้น $y \geq 0$

หรือ $y + 2 = \sqrt{x - 5}$ จะเห็นว่า $y + 2$ ไปเท่ากับตัวรากคู่ ดังนั้น $y + 2 \geq 0$

จะเห็นว่า $x - 5$ ไปอยู่ในรากคู่ ดังนั้น $x - 5 \geq 0$

- * 5. ถ้าตัวใดก็ตาม **“ไม่ตรงกับเงื่อนไขทั้ง 4 ข้อข้างต้น”** ให้ตัว ๆ นั้น เป็นสมาชิกของขอบเขตที่กำหนดไว้

เช่น $A = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \mid 2x = y^2 \}$

จะเห็นว่า y ไม่ได้ไปเท่ากับกำลังสอง แต่เป็นกำลังสองเอง
ดังนั้น $y \in \mathbb{N}$

แต่ $2x$ ไปเท่ากับกำลังสอง ดังนั้น $2x \geq 0$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1) $r_1 = \{ (x, y) \mid y = \frac{2}{x - 1} \}$

$r_A = \{ (x, y) \mid y = \frac{15}{2x + 3} \}$

$$2) \quad r_2 = \{(x, y) \mid y^2 = x - 5\}$$

$$r_b = \{(x, y) \mid x^2 = 3y + 9\}$$

$$3) \quad r_3 = \{(a, b) \mid |3a - 2| = 2b + 5\}$$

$$r_c = \{(a, b) \mid 2a + 5 = |5b - 3|\}$$

$$4) \quad r_4 = \{(b, a) \mid \sqrt{b^2 - 4} = a^2 - 5a + 6\}$$

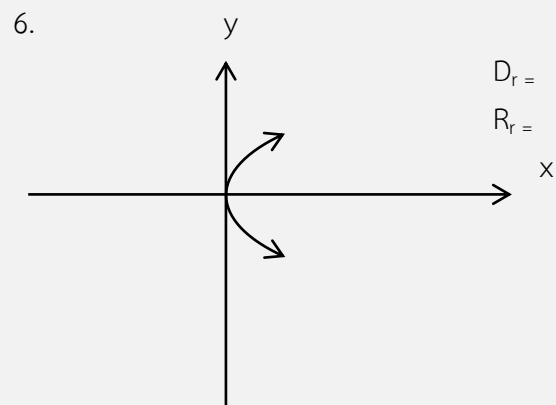
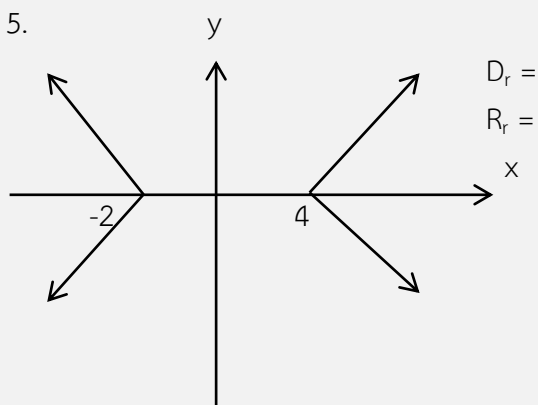
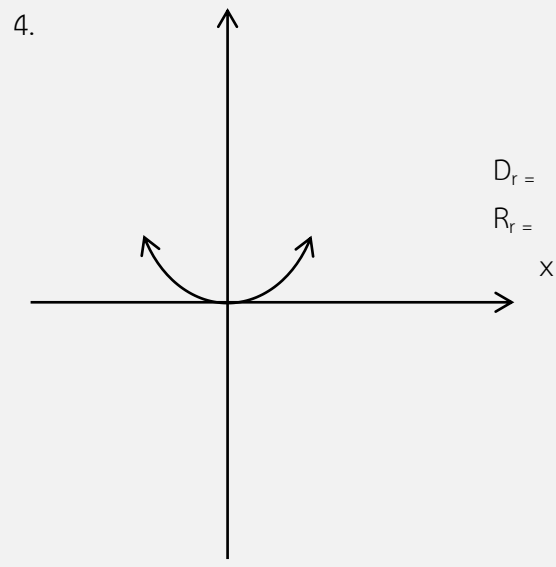
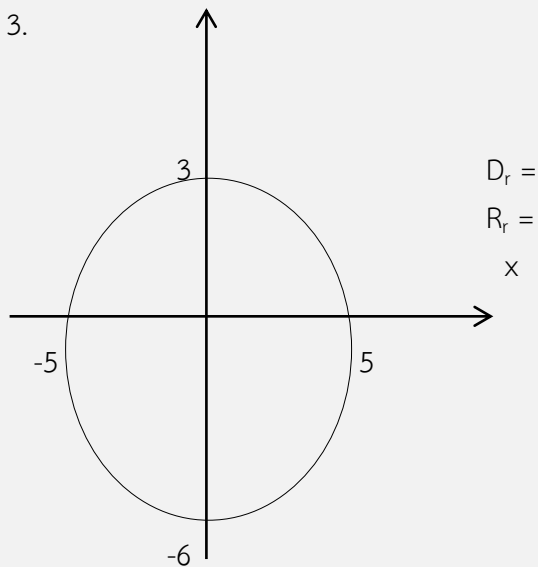
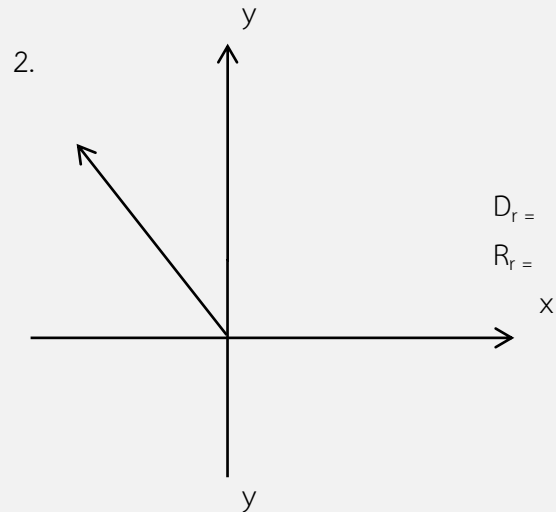
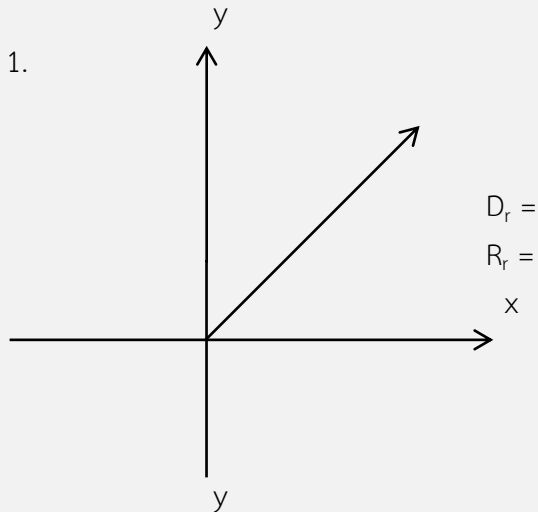
$$r_d = \{(b, a) \mid a^2 - 9 = \sqrt{b^2 + 7b - 8}\}$$

$$5) \quad r_5 = \{(y, x) \mid \frac{1}{x^2 - 9x - 10} = \sqrt{\frac{1}{y + 1}}\}$$

$$r_e = \{(y, x) \mid \left| \frac{x^2 - 1}{3} \right| = \frac{5}{y - 8}\}$$

“การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ จากกราฟ”

หาโดเมนได้จากการ**ลากเส้นตรงเป็นแนวดิ่ง** ถ้าตัดกับกราฟที่จุดใด จุดนั้นเป็นโดเมนของความสัมพันธ์ และ **หาเรนจ์**ได้จากการ**ลากเส้นตรงแนวนอน** ถ้าตัดกับกราฟที่จุดใด จุดนั้นเป็นเรนจ์ของความสัมพันธ์



“กราฟของความสัมพันธ์”

บทนิยาม ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง r เป็นสับเซตของ $R \times R$

กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบ โดยที่แต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพันธ์ r
จงวาดกราฟต่อไปนี้

1. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $\{(-1,2), (0,3), (1,-1), (2,3), (3,1)\}$

2. จงเขียนกราฟของ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$

3. จงเขียนกราฟของ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y \geq x^2\}$

4. จงเขียนกราฟของ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y < x^2\}$

“อินเวอร์สของความสัมพันธ์”

บทนิยาม **อินเวอร์สของความสัมพันธ์** คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการ**สลับที่**ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละ**คู่อันดับ**ที่เป็นสมาชิกของ r อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r

เขียนแทนด้วย r^{-1} นั่นคือ $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$

การหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r ทำได้ดังนี้

1. ถ้าความสัมพันธ์กำหนดเป็นเซตแจกแจง อินเวอร์สของความสัมพันธ์ คือ เซตที่ประกอบด้วย**คู่อันดับ**ที่เกิดจากการ**สลับที่**ของสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังของทุก ๆ คู่อันดับในความสัมพันธ์ที่กำหนด

จงหา อินเวอร์ส (r^{-1}) ของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งโดเมน ($D_{r^{-1}}$) และเรนจ์ ($R_{r^{-1}}$) ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ด้วย

เช่น $r = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)\}$

2. ถ้าความสัมพันธ์เป็น **เซตบอกเงื่อนไข** อินเวอร์สของความสัมพันธ์ทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 สลับที่ x และ y ในคู่อันดับ แต่เงื่อนไขเหมือนเดิม

$$\text{เช่น } r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

$$\therefore r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid y = 2x - 1\}$$

จงหา r^{-1} จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$1. r_1 = \{(x, y) \mid y + 2 = |x - 5|\} \quad r_1^{-1} = \dots\dots\dots$$

$$2. r_2 = \{(a, b) \mid |3a - 2| = 2b + 5\} \quad r_2^{-1} = \dots\dots\dots$$

$$3. r_3 = \{(b, a) \mid \sqrt{b^2 - 4} = a^2 - 5a + 6\} \quad r_3^{-1} = \dots\dots\dots$$

วิธีที่ 2 สลับที่ x และ y ในเงื่อนไข โดยแทนที่ x ด้วย y และแทนที่ y ด้วย x แต่คู่อันดับ (x, y) เหมือนเดิม

$$\text{เช่น } r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

$$\therefore r^{-1} = \{(x, y) \in A \times B \mid x = 2y - 1\}$$

จงหา r^{-1} จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$1. r_1 = \{(x, y) \mid y + 2 = |x - 5|\} \quad r_1^{-1} = \dots\dots\dots$$

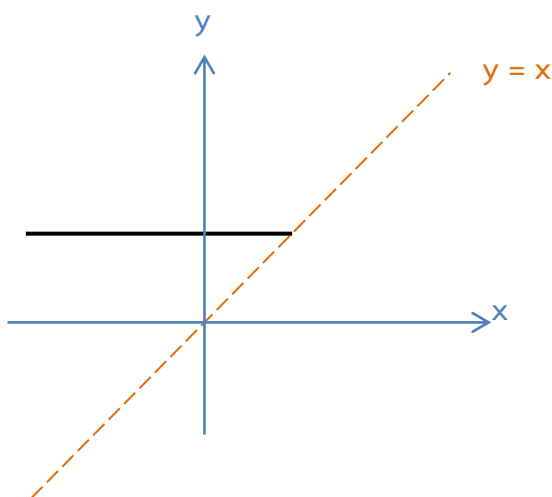
$$2. r_2 = \{(a, b) \mid |3a - 2| = 2b + 5\} \quad r_2^{-1} = \dots\dots\dots$$

$$3. r_3 = \{(b, a) \mid \sqrt{b^2 - 4} = a^2 - 5a + 6\} \quad r_3^{-1} = \dots\dots\dots$$

3. ถ้าความสัมพันธ์เป็นกราฟ อินเวอร์สของความสัมพันธ์ คือ **กราฟที่สมมาตร**กับกราฟของความสัมพันธ์ โดยมี **เส้นตรง $y = x$** เป็นแกนสมมาตร

ตัวอย่าง : จงหากราฟที่เป็นอินเวอร์สกับกราฟความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1)



การหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์สามารถทำได้ 2 แบบคือ

1. หาความสัมพันธ์อินเวอร์สก่อนแล้วค่อยหาโดเมนและเรนจ์ เช่น

$$\text{ถ้า } r_1 = \{(x,y) | y = \frac{2}{x-1}\} \text{ จงหา } D_{r^{-1}}, R_{r^{-1}}$$

2. หาโดเมนและเรนจ์ตามปกติจนเสร็จสิ้น แล้วค่อยเอาคำตอบมาสลับกัน เช่น

$$\text{ถ้า } r_2 = \{(x,y) | y = \frac{2}{x-1}\} \text{ จงหา } D_{r^{-1}}, R_{r^{-1}}$$

“ฟังก์ชัน”

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้นถ้าสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน จากบทนิยามกล่าวได้ว่า “ฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ซึ่งถ้ามี $(x, y_1) \in f$ และ $(x, y_2) \in f$ แล้ว $y_1 = y_2$ ”
(นั่นคือการจะเป็นฟังก์ชันได้ คู่อันดับตัวหน้าจะต้องให้ตัวหลังเพียงตัวเดียวเท่านั้น)

การตรวจสอบการเป็นฟังก์ชัน

แบบที่ 1 ความสัมพันธ์ที่เขียนแบบแจกแจงสมาชิก

- ใช้วิธีตรวจสอบคู่อันดับ

$$r_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$$

$$r_2 = \{(1,2), (1,3), (3,5), (4,8)\}$$

$$r_3 = \{(1,2), (3,2), (4,5)\}$$

$$r_4 = \{(1,2), (1,2), (4,5)\}$$

แบบที่ 2 ความสัมพันธ์ที่เขียนแบบบอกเงื่อนไข

- พิจารณาว่า x ค่าเดียวกัน ใช้ y ค่าเดียวกันหรือไม่

ใช้บทนิยาม โดยกำหนดว่า (x, y) และ $(x, z) \in f$ แล้วตรวจสอบว่า $y = z$ หรือไม่

จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดเป็นฟังก์ชันหรือไม่

$$r_1 = \{(x,y) | y = x^2\}$$

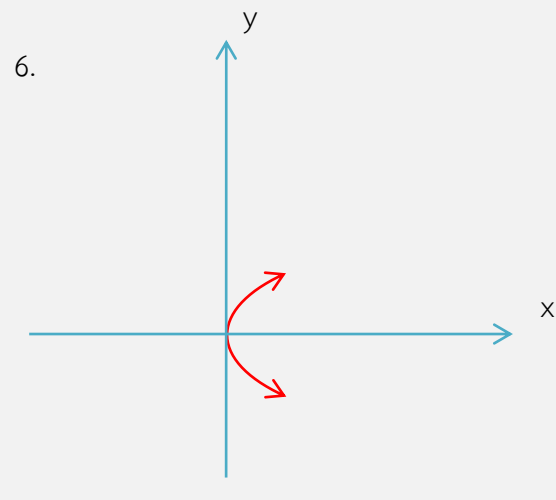
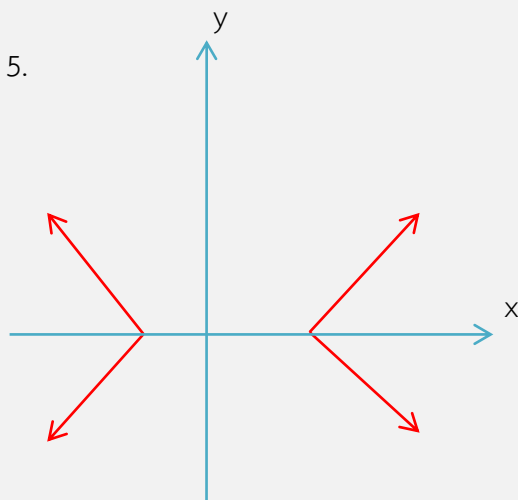
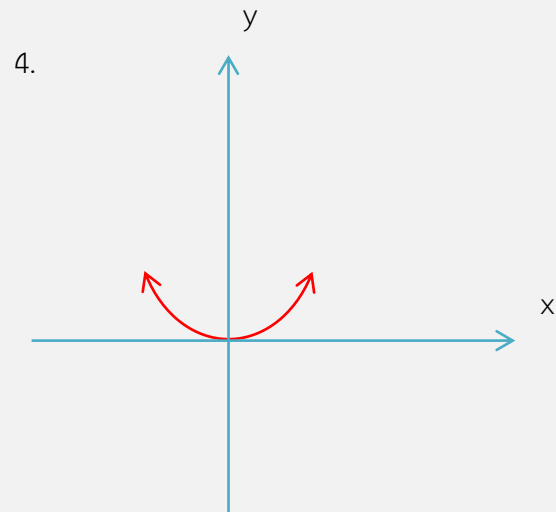
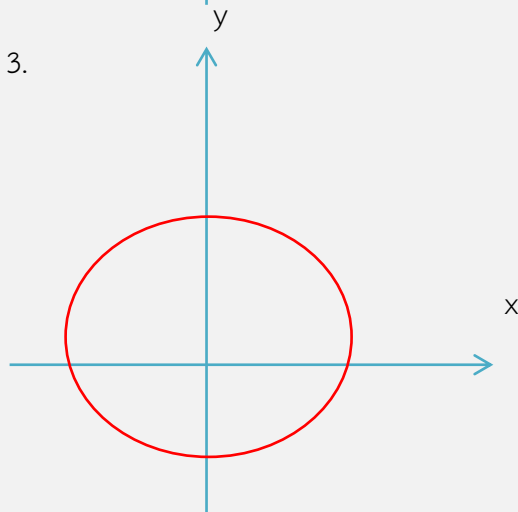
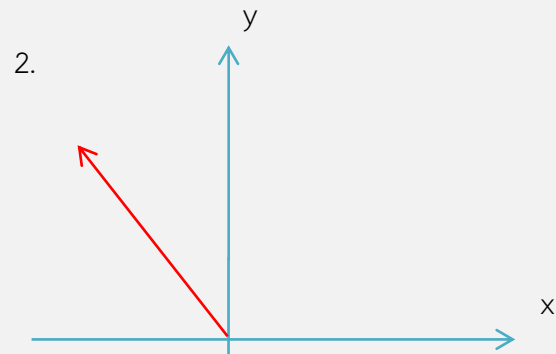
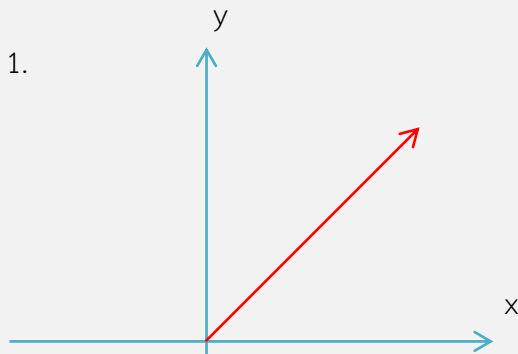
$$r_2 = \{(x,y) | y^2 = x\}$$

$$r_3 = \{(x,y) | y = x + 1\}$$

$$r_4 = \{(x,y) | x = |y|\}$$

แบบที่ 3 ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นกราฟ

ให้ลากเส้นตรงขนานกับแกน Y (ลากเส้นตรงแนวตั้ง) ถ้าเส้นขนานตัดกราฟมากกว่า 1 จุด จะ ไม่เป็นฟังก์ชัน
จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นฟังก์ชันบ้าง



การเขียนฟังก์ชัน

โดยทั่วไปนิยมเขียนแทนฟังก์ชันด้วยสัญลักษณ์ $f, g, h, \dots$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันและ $(x, y) \in f$ แล้ว เราจะกล่าวว่า y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย $f(x)$ อ่านว่า เอฟของเอกซ์ หรือ เอฟที่ x

การเขียนฟังก์ชันแบบต่าง ๆ

1. แบบแจกแจงสมาชิก

$$f = \{(2, 6), (3, 7), (8, 1), (6, 9)\} \text{ จงหา}$$

- | | | |
|-----------|------------------|--------------------|
| 1. $f(2)$ | 2. $f(3)$ | 3. $f(8)$ |
| 4. $f(6)$ | 5. $f(2) - f(3)$ | 6. $2f(8) + 4f(6)$ |

2. แบบบอกเงื่อนไข $f = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$

- | | | |
|------------------|-----------|-------------|
| 1. $f(0)$ | 2. $f(1)$ | 3. $f(2)$ |
| 4. $f(\sqrt{2})$ | 5. $f(a)$ | 6. $f(a+b)$ |

ให้ $f(2x+1) = x^2 + 2x + 3$ จงหา

- | | | |
|-----------|-----------|------------|
| 1. $f(a)$ | 2. $f(1)$ | 3. $f(-2)$ |
|-----------|-----------|------------|

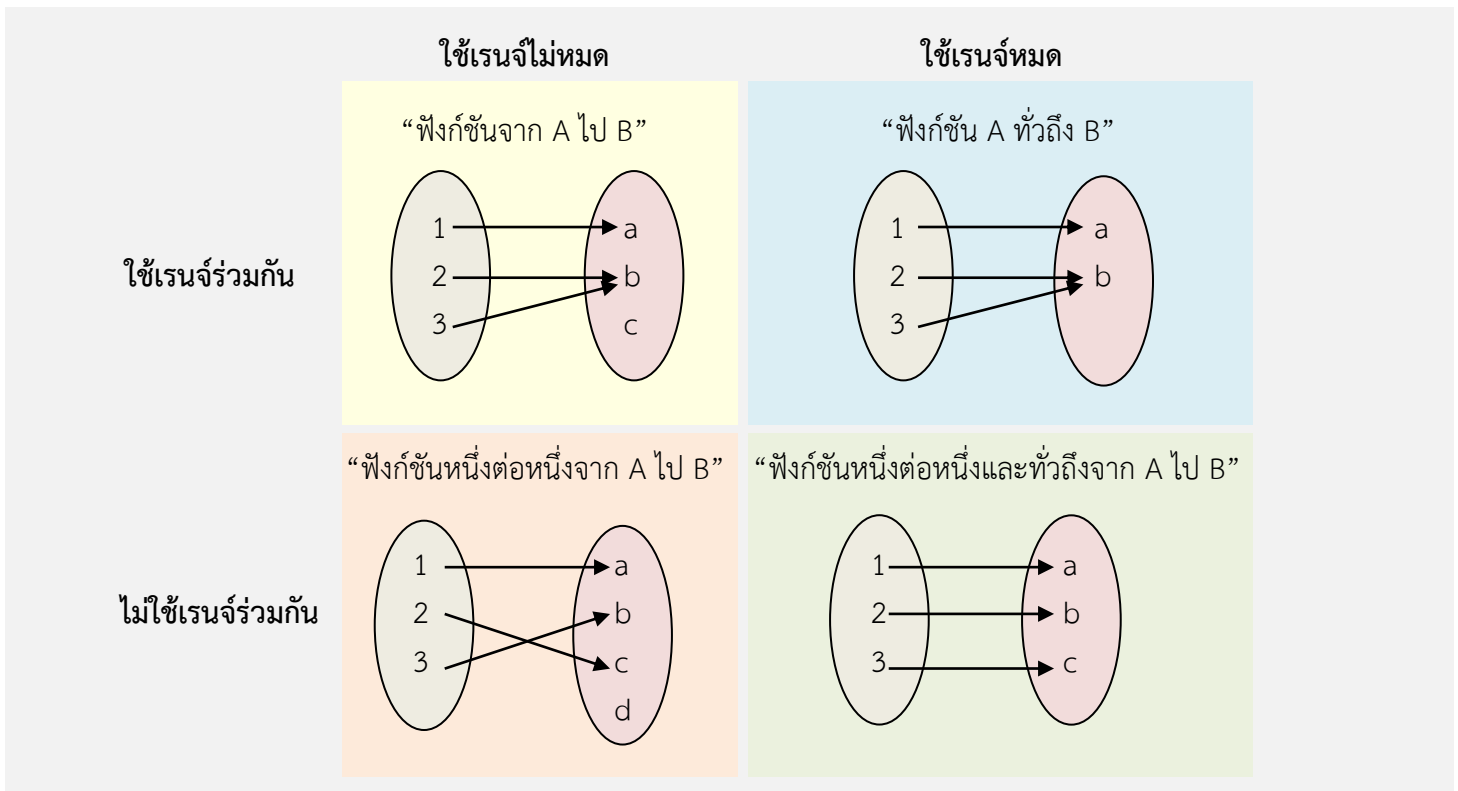
“การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน”

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันจึงมี **หลักเกณฑ์เช่นเดียวกับการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์**

จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

“ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน”

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันมี 4 รูปแบบ (ทุกความสัมพันธ์จะต้องใช้โดเมนครบทุกตัว)



กำหนด $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ จงวิเคราะห์ว่า จาก f_1 ถึง f_6 เป็นฟังก์ชันแบบใด

$$f_1 = \{(1, 2), (3, 3), (2, 3)\}$$

$$f_2 = \{(2, 3), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$f_3 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3)\}$$

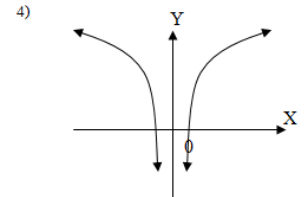
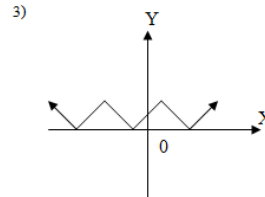
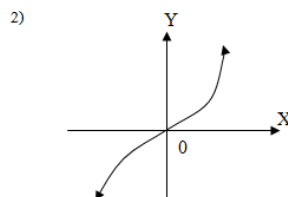
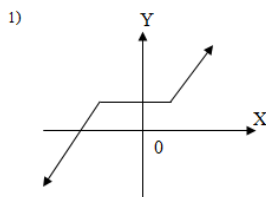
$$f_4 = \{(2, 2), (3, 2), (1, 2)\}$$

$$f_5 = \{(3, 2), (4, 1), (2, 2)\}$$

$$f_6 = \{(4, 3), (2, 1), (3, 1)\}$$

จากความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง จงวิเคราะห์ว่าจากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันแบบใด

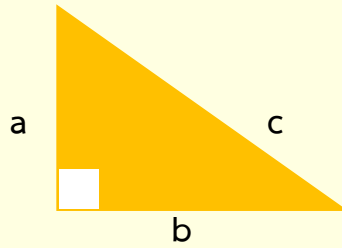
(ลากเส้นตรงแนวนอน ถ้าพบจุดตัดมากกว่า 1 จุด จะไม่เป็นแบบ 1 : 1)



บทที่ 6 : อัตราส่วนตรีโกณมิติ

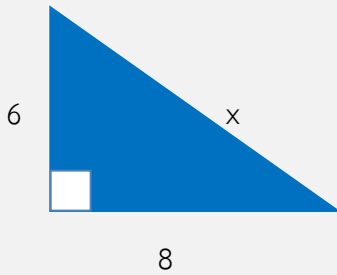
ตรีโกณมิติเป็นการวัดรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะวัดระยะทาง พื้นที่ มุม ทิศทาง และก่อนที่จะเข้าสู่บทเรียน ต้องมีการทบทวนบทเรียนเกี่ยวกับการหาความยาวของ สามเหลี่ยมมุมฉากแต่ละด้าน นั่นคือ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

“ถ้ามีรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ นำด้านประกอบมุมฉากมายกกำลังสองแล้วบวกกัน จะได้ด้านตรงข้ามมุมฉากยกกำลังสอง” นั่นคือ $a^2 + b^2 = c^2$

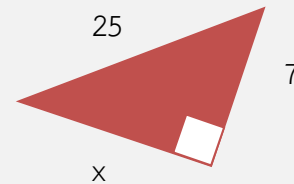


จงหาค่าความยาว x ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

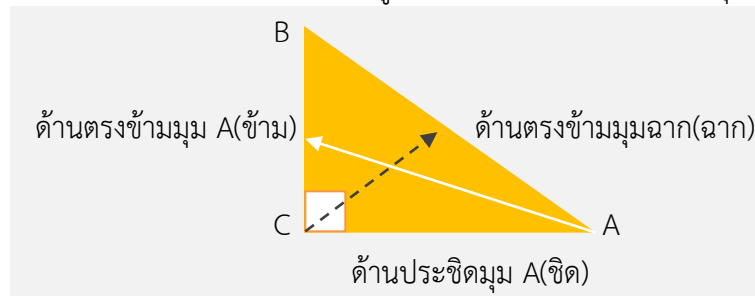
1.



2.



อัตราส่วนตรีโกณมิติ คือการหาอัตราส่วนระหว่างด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยการจับคู่ในการหาอัตราส่วนนั้น จะมีชื่อแตกต่างกันไป เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC กำหนดให้มุม C เป็นมุมฉาก (ในที่นี้เราจะสนใจที่มุม A) จะได้ว่า



$$\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านประชิดมุม A}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}$$

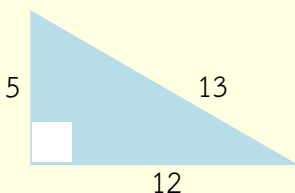
$$\sec A = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านประชิดมุม A}}$$

$$\cot A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}$$

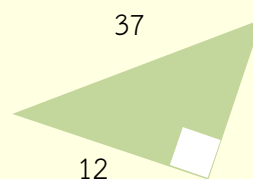
เพิ่มเติม : $(\sin A)(\operatorname{cosec} A)=1$, $(\cos A)(\sec A)=1$, $(\tan A)(\cot A)=1$

จงหาทุกค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้

1.



2.



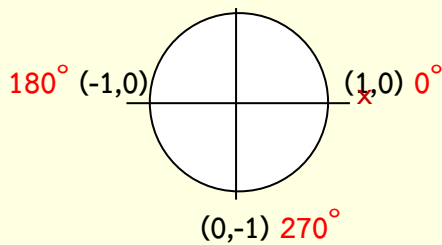
ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

มุม A	30°	45°	60°	0°	90°	37°	53°
sin A	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
tan A	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	0	หาค่าไม่ได้	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

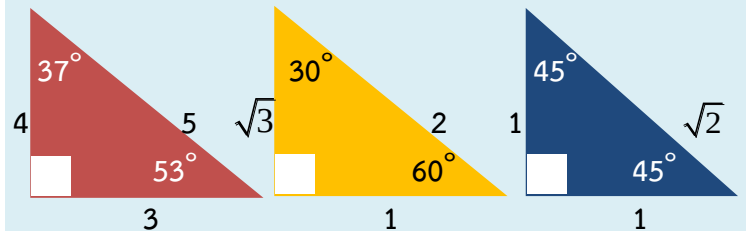
วงกลมรัศมี 1 หน่วย

คู่อันดับ (cos A, sin A)

y(0,1) 90°



รูปสามเหลี่ยม



เพลง ตรีโกณ (ทำนองเพลงมาเล ของพี่เป๋ออาร์ักษ์)

* ตรีโกณ ตรีโกณ มี sin cos tan

ตรีโกณ ตรีโกณ มีมุม 30° 45° 60°

เรียง 1 2 3 และ 3 2 1

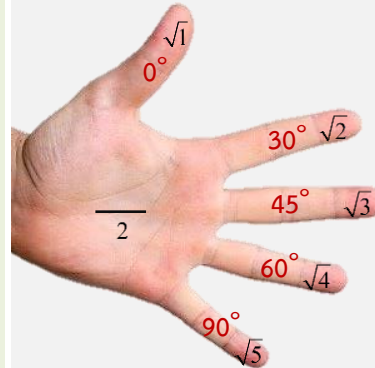
ข้างบนใส่รูป ข้างล่างใส่เลข 2

ส่วนค่าของ tan เอา sin ส่วน cos

มันก็มีเท่านี้หลักการจำ sin cos tan (*)

(วาดตารางก่อนค่อยร้องเพลง)

กฎมือซ้าย (sine)



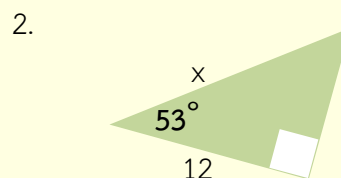
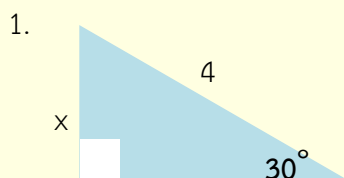
เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

จงหาค่า x



3. $\sin^2 30^\circ - 2 \tan 45^\circ + 5 \cos 37^\circ + \cos^2 30^\circ = x$

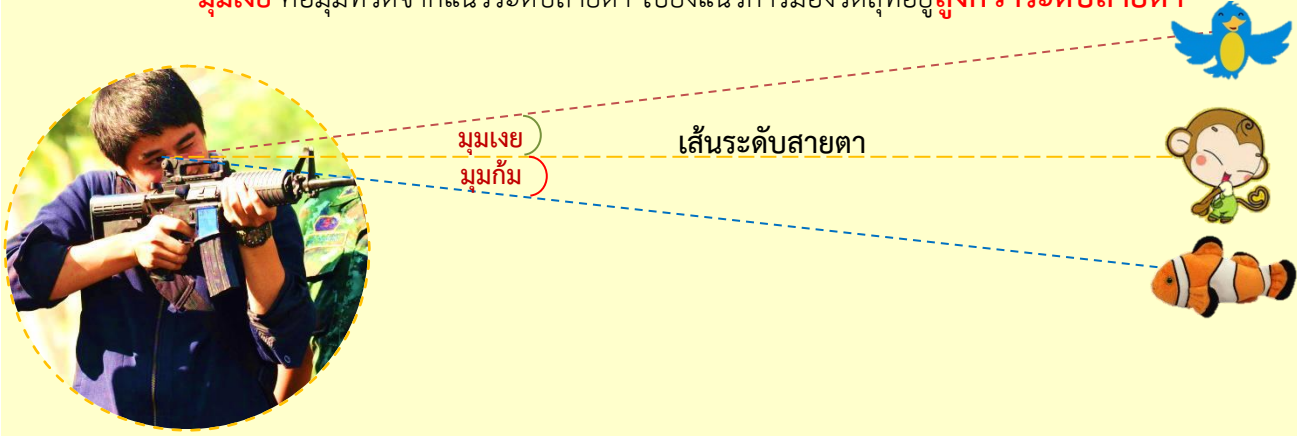
4. ถ้า $\cot \theta = 1$ แล้ว จงหา $\operatorname{cosec} \theta - 2 \sin \theta + \frac{\sec^2 \theta}{3}$

การนำไปใช้

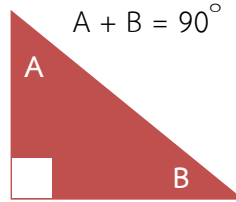
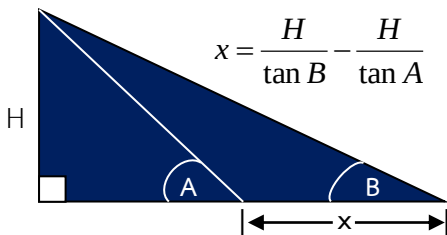
เรามักจะใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไป **วัดความสูง** ของสิ่งที่ไม่สามารถวัดได้อย่างง่ายดาย เช่น ความสูงของภูเขา ตึก หรืออาจใช้วัดระยะทางระหว่างสิ่งหนึ่งกับอีกสิ่งหนึ่ง **วัดมุม หาพื้นที่** เพื่อร่นเวลา และลดการใช้อุปกรณ์การวัดที่ฟุ่มเฟือย และสามารถทำให้งานการวัด สำเร็จได้อย่างรวดเร็ว โดยจะมีหลักการเพิ่มเติมจากความรู้ข้างต้นคือ

มุมก้ม คือมุมที่วัดจากแนวระดับสายตา ไปยังแนวการมองวัตถุที่อยู่ต่ำกว่าระดับสายตา

มุมเงย คือมุมที่วัดจากแนวระดับสายตา ไปยังแนวการมองวัตถุที่อยู่สูงกว่าระดับสายตา



ความสัมพันธ์บางประการที่น่าสนใจ



Co-function

$\sin A$	= $\cos B$ ($\cos B$)
$\cos A$	= $\sin B$ ($\sin B$)
$\tan A$	= $\cot B$ ($\cot B$)
$\csc A$	= $\sec B$ ($\sec B$)
$\sec A$	= $\csc B$ ($\csc B$)
$\cot A$	= $\tan B$ ($\tan B$)

(*เติม co เปลี่ยนมุม A เป็น B ก็จะได้ co-function)

(co เจอ co ตัดทิ้ง)

จงหาค่าต่อไปนี้

- ถ้าสามเหลี่ยม ABC มี B เป็นมุมฉาก $\tan A = 2$ แล้ว $\cot C$ มีค่าเป็นเท่าใด
- $\sec 83^\circ$ มีค่าตรงกับฟังก์ชันตรีโกณมิติใด
- ถ้านายเขียวเสวยยืนอยู่บนหน้าผาสูง 100 เมตร มองเห็นเรือ 2 ลำ ด้วยมุมก้ม ลำหนึ่งทำมุม 30° อีกลำหนึ่งทำมุม 45° จงหาระยะทางระหว่างเรือทั้งสองลำ

บทที่ 7 : ลำดับและอนุกรม

ลำดับ(sequence) เป็นการเรียงจำนวนอย่างมีความหมาย

ถ้ามีการสลับที่ ความหมายของลำดับนั้นก็จะเปลี่ยนไป

โดยทั่วไปแล้ว ลำดับที่แบ่งประเภทด้วยจำนวนนั้น

สามารถแบ่งได้ 2 ประเภท คือ

ลำดับที่สามารถนับจำนวนได้ เรียกว่าลำดับจำกัด

เช่น 10, 20, 30, 40 หรือ 1, 2, 3, ..., 500

และลำดับที่ไม่สามารถนับจำนวนได้ เรียกว่าลำดับอนันต์

เช่น 10, 20, 30, ... หรือ ..., -3, -2, -1, 0



เราจะเรียก a_n ว่า พจน์ทั่วไป

เช่น 10, 20, 30, ... จะมี $a_n = \dots\dots\dots$

หรือ 2, 4, 8, 16, ... จะมี $a_n = \dots\dots\dots$

และการมี a_n จะทำให้เราสามารถหา พจน์ที่ n (ตัวที่ n) ได้

เช่น ลำดับ 2, 4, 8, 16, ... จงหาพจน์ที่ 10 (ตัวที่ 10) ว่ามีค่าเท่าใด

เรารู้ว่า $a_n = 2^n$ แสดงว่า พจน์ที่ 10 หรือตัวที่ 10 ก็คือการแทนค่า $n = \dots\dots\dots$ ก็จะได้ว่า

$$a_{10} = \dots\dots\dots$$

หรือ ลำดับ 5, -10, 15, -20, ... จงหาพจน์ที่ 100 (ตัวที่ 100) ว่ามีค่าเท่าใด

เรารู้ว่า $a_n = 5n(-1)^{n+1}$ แสดงว่า พจน์ที่ 100 หรือตัวที่ 100 ก็คือการแทนค่า $n = \dots\dots\dots$ ก็จะได้ว่า

$$a_{10} = \dots\dots\dots$$

จงหา 3 พจน์แรกของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$1. a_n = 2n + 5$$

$$2. a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$3. a_n = \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n}$$

$$4. a_n = \sin \frac{np}{2}$$

จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้

$$1. 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$$

$$2. 1, 4, 7, 10, \dots$$

ลำดับเลขคณิต

ลำดับที่แต่ละพจน์ที่ติดกัน ห่างกัน ในระยะที่เท่ากันเสมอ ๆ ระยะระหว่างจำนวนที่ติดกันเรียกว่า “ผลต่างร่วม (d)”
หาได้จาก $a_{n+1} - a_n = d$ (นำตัวหลังมาลบตัวหน้าที่ติดกัน จะเท่ากันทุกคู่)

เช่น 2, 4, 6, 8, 10 ห่างกันทีละ

-10, -8, -6, -4, -3, -2, ... ห่างกันทีละ

0, 0, 0, 0, 0, 0 ห่างกันทีละ

2, 2, 2, 2, 2, 2, ... ห่างกันทีละ

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

กำหนดให้ลำดับเลขคณิตคือ 1, 4, 7, 10, ...

วิธีที่ 1 (วิธีทั่วไป) ให้ $a_n = an + b$ (รูปทั่วไป)

วิธีที่ 2 (วิธีตรง)

วิธีที่ 3 (วิธีใช้สูตร)

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

วิธีที่ 4 (วิธีต่อ)

ความสัมพันธ์เพิ่มเติมเกี่ยวกับลำดับเลขคณิต

จาก	$a_1 + d =$ $a_{15} + 5d =$	$a_3 + 7d =$ $a_{99} + 101d =$	เช่น กำหนด $a_{10} = 20, d = 3$ จงหา a_{100}
	จะได้ว่าถ้า $a_i + jd = a_k$ จะได้ $i + j = k$		

ลำดับเรขาคณิต

ลำดับที่แต่ละพจน์ที่ติดกัน ห่างกัน ในอัตราส่วนที่เท่ากันเสมอ ๆ อัตราส่วนระหว่างจำนวนที่ติดกันเรียกว่า “อัตราส่วนร่วม (r)” หาได้จาก a_{n+1} หารด้วย $a_n = r$ (นำตัวหลังมาหารด้วยตัวหน้าที่ติดกัน จะเท่ากันทุกคู่)

เช่น 2, 4, 8, 16, 32 ห่างกันที่ละ 3, 9, 27, 81, 243, ... ห่างกันที่ละ
 32, -16, 8, -4, 2 ห่างกันที่ละ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ... ห่างกันที่ละ

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

กำหนดให้ลำดับเลขคณิตคือ 4, 12, 36, 108, ...

วิธีที่ 1 (วิธีตรง)

วิธีที่ 2 (วิธีใช้สูตร) $a_n = a_1 r^{n-1}$

ความสัมพันธ์เพิ่มเติมเกี่ยวกับลำดับเรขาคณิต

จาก	$a_1 \times r =$ $a_{15} \times r^5 =$	$a_3 \times r^4 =$ $a_{99} \times r^{101} =$	เช่น กำหนด $a_{10} = 20, r = 3$ จงหา a_{14}
	จะได้ว่าถ้า $a_i \times r^j = a_k$ จะได้ $i + j = k$		

อนุกรม(series) คือผลบวกของลำดับ

อนุกรมเลขคณิต คือผลบวกของลำดับเลขคณิต

จงหาผลบวกของ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$

วิธีตรง

อนุกรมเรขาคณิต คือผลบวกของลำดับเรขาคณิต

จงหาผลบวกของ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{16}$

วิธีสูตร
$$s_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

วิธีสูตร
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Search YouTube (Free): โอ้มจเงย ลำดับ หรือ <https://www.youtube.com/watch?v=d284sXhOOwc>

บทที่ 8 : ความน่าจะเป็น



หลักการนับเบื้องต้น

หลักการนับเบื้องต้นนั้นจะมีอยู่ 2 ลักษณะ คือ นับแบบ**เป็นระเบียบ**และ**ไม่เป็นระเบียบ**
หลักการนับแบบเป็นระเบียบสามารถวาดเป็นแผนภาพต้นไม้ได้อย่าง**มีรูปแบบที่ชัดเจน**เช่น
จงหา วิธีการแต่งตัวที่แตกต่างกัน เมื่อ มีเสื้อ 3 แบบ กางเกง 2 แบบ และ แว่นตา 2 แบบ

การนับที่มีรูปแบบไม่ชัดเจนเช่น **จงหา** วิธีการขยับของจุดบนเส้นจำนวนมีจุดเริ่มต้นคือ 0 โดยจะสนใจที่จำนวนเต็ม เดินได้แค่
 ทางซ้ายกับทางขวาของตนเองเท่านั้น ซึ่งในการขยับแต่ละครั้ง จะขยับได้ครั้งละ 1 หน่วย ถ้าเดินครบ 4 ครั้ง ถือว่าจบ ถ้าเดินไป
 เจอ -2 กับ 2 ก็ถือว่าจบ

จงใช้กฎการนับในการหาคำตอบจากโจทย์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. ข้อสอบชุดหนึ่งมี 2 ตอน ตอนที่ 1 มี 5 ข้อ ให้เลือกตอบว่าถูกหรือผิด

ตอนที่ 2 มี 5 ข้อ เป็นข้อสอบปรนัย 4 ตัวเลือก

ถ้าผู้เข้าสอบต้องตอบข้อสอบชุดนี้ทุกข้อโดยไม่เว้นแล้ว จะมีวิธีการตอบข้อสอบชุดนี้ได้ต่าง ๆ กันทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $5^2 \times 5^4$ วิธี

2) $2^5 \times 5^4$ วิธี

3) $2^5 \times 4^5$ วิธี

4) $5^2 \times 4^5$ วิธี

2. ในการเขียนตัวเลข 3 หลักจากเลขโดด 1 ถึง 7 โดยที่เลขโดดในหลักทั้งสามไม่ซ้ำกันเลย จะมีวิธีเขียนตัวเลขเหล่านี้ที่แสดงจำนวนคี่ได้กี่วิธี

3. บ้าน Weasley มีกันอยู่ 6 คน มีพ่อ แม่ และลูก 4 คน จำนวนวิธีที่จะจัดให้คนทั้งหกเรียงยืนกันเพื่อถ่ายรูป โดยให้พ่อกับแม่ ยืนอยู่ริมสองข้างเสมอ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 12 วิธี

2) 24 วิธี

3) 36 วิธี

4) 48 วิธี



ทฤษฎีความน่าจะเป็น

การทดลองสุ่ม คือ การกระทำที่เราไม่สามารถบอกได้ว่าผลจะเป็นเช่นไร แต่บอกได้ว่าผลลัพธ์จะเป็นอะไรได้บ้าง
แซมเปิลสเปซ (Sample Space: S) คือ เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้

เหตุการณ์ (Event: E) คือผลลัพธ์ที่เราสนใจ โดยเหตุการณ์เป็นสับเซตของแซมเปิลสเปซ

ความน่าจะเป็น (Probability) ของเหตุการณ์ E หาได้จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

เมื่อ $n(E)$ คือ จำนวนผลลัพธ์ที่สนใจ และ $n(S)$ คือ จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้

สมบัติของความน่าจะเป็น

- 1) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด มีค่าอยู่ในช่วง 0 ถึง 1 เท่านั้น
- 2) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย มีค่าเท่ากับ 0
- 3) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีผลลัพธ์ทุกแบบ มีค่าเท่ากับ 1
- 4) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เราสนใจ + ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เราไม่สนใจ เท่ากับ 1
(หรือ เหตุการณ์ทั้งหมด - เหตุการณ์ที่เราไม่สนใจ = เหตุการณ์ที่เราสนใจ)
- 5) เมื่อเราเจอคำว่า “อย่างน้อย” ควรหาความน่าจะเป็นด้วยการหักออกจากเหตุการณ์ตรงข้าม

จงหาความน่าจะเป็นของการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ให้มีผลรวมมากกว่า 3

บทที่ 9 : สถิติเบื้องต้น

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสถิติ

สถิติ เป็นกระบวนการของ **การรวบรวมข้อมูล นำเสนอข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และการตีความข้อมูล**
ข้อมูล คือ **ข้อเท็จจริง** ที่ได้จากการรวบรวมหรือการสังเกต อาจเป็นตัวเลขหรือไม่เป็นตัวเลขก็ได้

ข้อมูลแบ่งได้เป็น 2 ประเภท (จำแนกตามวิธีการเก็บรวบรวม) คือ

1. ข้อมูลปฐมภูมิ หมายถึง ข้อมูลที่ได้มาจากการ **ลงพื้นที่ไปเก็บข้อมูลโดยตรง**
2. ข้อมูลทุติยภูมิ หมายถึง ข้อมูลที่ได้มาจากที่ ๆ **ผู้อื่นได้รวบรวมบันทึกไว้แล้ว** (อ้างอิงจากชาวบ้าน)

ข้อมูลแบ่งได้เป็น 2 ประเภท (จำแนกตามลักษณะของข้อมูล) คือ

1. ข้อมูลเชิงคุณภาพ เป็นข้อมูลที่บ่งบอกโดยใช้ **คุณสมบัติ ลักษณะ สภาพ ฐานะ หรือความคิดเห็น** เป็นตัวจำแนก เช่น เพศ อาชีพ เชื้อชาติ ระดับการศึกษา ที่อยู่ เบอร์รองเท้า ไซส์เสื้อ เป็นต้น
2. ข้อมูลเชิงปริมาณ เป็นข้อมูลที่ได้จากการ **ชั่ง ตวง วัด** สามารถนำมา **เปรียบเทียบความมากน้อยได้** เช่น อายุ น้ำหนัก ส่วนสูง เงินเดือน เป็นต้น

การเก็บรวบรวมข้อมูล ทำได้ 2 วิธี คือ

1. การสำมะโน เป็นการรวบรวมข้อมูลอย่าง **ละเอียด** จากทุกหน่วยของสิ่งที่เราอยากรู้
2. การสำรวจจาก **ตัวอย่าง** เป็นการรวบรวมข้อมูลจากตัวอย่างเพื่อใช้เป็น **ตัวแทนของข้อมูล** ในทางปฏิบัติ การสำรวจข้อมูลปฐมภูมิทำได้ 5 วิธี คือ การสัมภาษณ์ การสอบถามทางไปรษณีย์ การสอบถามทางโทรศัพท์ การสังเกต และการทดลอง

ความหมายของศัพท์พื้นฐาน

1. ความถี่ (frequency: f) คือ **จำนวนข้อมูล** ที่อยู่ในอันตรภาคชั้นนั้น ๆ
2. ความถี่สะสม (cumulative frequency: F) คือ **ผลรวมความถี่** ของความถี่ในชั้นนั้นกับอันตรภาคชั้นที่ต่ำกว่าทั้งหมด
3. ขอบล่าง – ขอบบน (lower limit – upper limit) คือ ค่าน้อยที่สุด – ค่ามากที่สุดของข้อมูลในแต่ละอันตรภาคชั้น (ทำหน้าที่เป็น **รอยต่อ** เชื่อมตัวเลขที่ไม่ต่อเนื่องระหว่างชั้น)
4. จุดกึ่งกลางชั้น (mid point: x) คือ ค่าที่ใช้เป็น **ตัวแทนของข้อมูล** ในแต่ละอันตรภาคชั้น
โดยที่จุดกึ่งกลางชั้น = $\frac{\text{ขอบล่าง} + \text{ขอบบน}}{2}$
5. ความกว้างอันตรภาคชั้น (interval: I) คือ **ผลต่างของขอบบนและขอบล่างของชั้นนั้น ๆ** โดยทั่วไป เราจะนิยมสร้างให้ตารางมีความกว้างอันตรภาคชั้นเท่ากันทุกชั้น
6. จำนวนข้อมูล (N): **จำนวนข้อมูลทั้งหมด** เท่ากับ ผลรวมของความถี่ คือ $N = \sum f$
7. ความถี่สัมพัทธ์ (relative frequency: rf) คือ ค่าที่แสดงว่า **ความถี่ในชั้นนั้น ๆ คิดเป็นอัตราส่วน** เท่าไหร่ของความถี่ทั้งหมด บางครั้งนิยมแปลงให้เป็นเปอร์เซ็นต์เพื่อให้เห็นภาพได้ชัดเจนขึ้น ทั้งนี้ ความถี่สัมพัทธ์ = $\frac{\text{ความถี่}}{\text{จำนวนข้อมูล}}$
และจะได้ว่า ผลรวมของความถี่สัมพัทธ์มีค่าเท่ากับ 1 หรือ 100%

การสร้างตารางแจกแจงความถี่จากรอยขีด (tallies)

ตัวอย่างเช่น ตารางแสดงคะแนนปลายภาคของนักเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เป็นดังนี้

5, 5, 9, 11, 12, 13, 15, 15, 17, 20, 21, 21, 21, 22, 22, 23, 24, 24, 24, 24, 24, 25, 26, 28, 28,
28, 29, 30, 31, 31, 31, 35, 35, 36, 36, 38, 38, 38, 38, 38, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 47, 48, 49, 49

คะแนน	รอยขีด	ความถี่	ความถี่สะสม	ขอบล่าง - ขอบบน	จุดกึ่งกลางชั้น	อันตรภาคชั้น	ความถี่สัมพัทธ์	ความถี่สะสมสัมพัทธ์
1 – 10								
11 – 20								
21 – 30								
31 – 40								
41 – 50								

คำอธิบายตาราง

1. ความกว้างของอันตรภาคชั้น (I) เท่ากับ 10 (ขอบบน - ขอบล่าง)
2. ขอบล่างของชั้น 11 – 20 คือ 10.5 คำนวณได้จากค่าเฉลี่ยของ 10 และ 11 ซึ่งเป็นรอยต่อระหว่างชั้น
ขอบบนของชั้น 11 – 20 คือ 20.5 คำนวณได้จากค่าเฉลี่ยของ 20 และ 21 เช่นเดียวกัน

ฮิสโตแกรม

ฮิสโตแกรม คือ แผนภูมิแท่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่วางเรียงต่อเนื่องกัน โดย **แกนนอนแทนค่าของตัวแปร** และ **แกนตั้งแทนความถี่ของข้อมูล** ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แทนความกว้างของอันตรภาคชั้น ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แทนความถี่ของข้อมูลที่อยู่ในอันตรภาคชั้นนั้น ๆ ดังนั้น ผลรวมของความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกรูปจะมีค่าเท่ากับจำนวนข้อมูลทั้งหมด

วิธีสร้างฮิสโตแกรมมี 2 วิธี คือ สร้างจากจุดกึ่งกลางชั้น และสร้างจากขอบบน - ขอบล่าง

จงสร้างฮิสโตแกรมจากตารางแจกแจงความถี่ข้างต้น(ตารางด้านบน)

วิธีที่ 1 สร้างจาก**จุดกึ่งกลาง**ของอันตรภาคชั้น
โดยใช้จุดกึ่งกลางชั้นเป็นตัวแทนของข้อมูล

วิธีที่ 2 สร้างจาก**ขอบบน**และ**ขอบล่าง**ของอันตรภาคชั้น
แสดงขอบเขตของคะแนนในแต่ละแท่ง
(สังเกตว่าขอบบนและขอบล่างจะทำหน้าที่
เป็นรอยต่อเชื่อมข้อมูลในแต่ละชั้น)

แผนภาพต้น – ใบ เป็นการนำเสนอข้อมูลโดยให้ **ต้น** เป็นตัวเลขที่อยู่หน้าสุด ซึ่งอาจเป็นเลขหลักเดียวหรือมากกว่าหนึ่งหลักก็ได้ ส่วน **ใบ** คือตัวเลขที่เป็นหลักหน่วยของข้อมูล ทั้งนี้ วิธีอ่านแผนภาพอาจแนบมาเป็นสัญลักษณ์ท้ายแผนภาพ

พิจารณาแผนภาพต้น – ใบ แสดงอายุของผู้เข้าภาพยนตร์ในช่วงเวลา 13.20 – 16.05 น.

ต้น	ใบ
0	9 5 8 9
1	0 0 2 4 6 7
2	3 2 7 0 5
3	9 0 0
4	2

คำอธิบาย จากแผนภาพต้น – ใบ จะได้ว่า มีผู้เข้าภาพยนตร์ในช่วงเวลาดังกล่าวจำนวน 19 คน แบ่งตามอายุได้เป็น

เราอาจพบแผนภาพต้น – ใบ ที่มีต้นอยู่ตรงกลาง และมีใบทั้งสองฝั่งในการนำเสนอข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบข้อมูล 2 กลุ่ม เรียกแผนภาพดังกล่าวว่า แผนภาพใบ – ต้น – ใบ

พิจารณาแผนภาพต้น – ใบ แสดงคะแนนของนักเรียนที่สอบผ่านของห้องที่ 4/1 และห้องที่ 4/2

ห้องที่ 4/1		ห้องที่ 4/2
5 7 9 0	3	7 0
1 9 6 5 3	4	1 4 5 2

คำอธิบาย ห้องที่ 4/1 มีนักเรียนสอบผ่านจำนวน 9 คน โดยทั้ง 9 คนได้คะแนน
คะแนน ส่วนห้องที่ 4/2 มีนักเรียนสอบผ่าน 6 คน โดยทั้ง 6 คนได้คะแนน

ข้อดีของแผนภาพต้น – ใบ คือ ข้อมูลจะถูกแบ่งตามช่วงคะแนนแบบหยาบ ๆ มาให้แล้ว ทำให้คนอ่านสามารถประมาณจำนวนข้อมูลในแต่ละช่วงได้คร่าว ๆ คือ **เห็นภาพรวมของข้อมูลได้ง่าย**
ทั้งนี้ สังเกตว่าข้อมูลในแผนภาพต้น – ใบ **ไม่จำเป็นต้องเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปหามาก**มาให้

ตำแหน่งที่ของข้อมูล

ตำแหน่งที่ของข้อมูล มีประโยชน์ในการ**เปรียบเทียบข้อมูล**ในกลุ่มเดียวกัน โดยที่ตำแหน่งของข้อมูลจะสื่อให้เราเห็นว่าข้อมูลตัวนั้นดีหรือไม่เมื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลในกลุ่มเดียวกัน

ในการระบุตำแหน่งที่ของข้อมูล เราใช้ **มัธยฐาน คอว์ไทล์ เดซิส์ และ เปอร์เซนไทล์**

1. มัธยฐาน (Median)

มัธยฐาน ก็คือค่ากลางที่เป็นตำแหน่งตรงกลางของข้อมูลที่**เรียงจากน้อยไปมาก**แล้ว ซึ่งตำแหน่งของมัธยฐานจะแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ส่วน

Me เรียกว่า มัธยฐาน มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่**น้อยกว่าตำแหน่ง Me อยู่ 1 ใน 2**

2. คอว์ไทล์ (Quartile)

มาจากคำว่า Quart ซึ่งแปลว่า 1 ใน 4 ซึ่งจะได้จากการแบ่งข้อมูลออกเป็น **4 ส่วน**เท่า ๆ กัน และค่าที่แบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่ากัน ได้แก่

Q_1 เรียกว่า คอว์ไทล์ที่ 1 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่**น้อยกว่าตำแหน่ง Q_1 อยู่ 1 ใน 4**

Q_2 เรียกว่า คอว์ไทล์ที่ 2 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่**น้อยกว่าตำแหน่ง Q_2 อยู่ 2 ใน 4**

Q_3 เรียกว่า คอว์ไทล์ที่ 3 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่**น้อยกว่าตำแหน่ง Q_3 อยู่ 3 ใน 4**

Q_4 เรียกว่า คอว์ไทล์ที่ 4 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่**น้อยกว่าตำแหน่ง Q_4 อยู่ 4 ใน 4**

Q_4 ไม่ได้ใช้ในการแบ่งข้อมูล

3. เดไซล์ (Decile)

เดไซล์มาจากคำว่า เดคะ (Deca) แปลว่า 10 ดังนั้น เดไซล์ จึงเป็นการแบ่งข้อมูลออกเป็น 10 ส่วนเท่า ๆ กัน

ได้แก่ D_1 เรียกว่า เดไซล์ที่ 1 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่น้อยกว่าตำแหน่ง D_1 อยู่ 1 ใน 10

D_2 เรียกว่า เดไซล์ที่ 2 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่น้อยกว่าตำแหน่ง D_2 อยู่ 2 ใน 10

D_3 เรียกว่า เดไซล์ที่ 3 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่น้อยกว่าตำแหน่ง D_3 อยู่ 3 ใน 10

.....

D_{10} เรียกว่า เดไซล์ที่ 10 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่น้อยกว่าตำแหน่ง D_{10} อยู่ 10 ใน 10

D_{10} ไม่ได้ใช้ในการแบ่งข้อมูล

4. เปอร์เซนไทล์ (Percentile)

เปอร์เซนไทล์ (Percentile) มาจากคำว่า Percent แปลว่า 1 ใน 100 ซึ่งเป็นการแบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่า ๆ กัน

ได้แก่ P_1 เรียกว่า เปอร์เซนไทล์ที่ 1 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่น้อยกว่าตำแหน่ง P_1 อยู่ 1 ใน 100

P_2 เรียกว่า เปอร์เซนไทล์ที่ 2 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่น้อยกว่าตำแหน่ง P_2 อยู่ 2 ใน 100

P_3 เรียกว่า เปอร์เซนไทล์ที่ 3 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่น้อยกว่าตำแหน่ง P_3 อยู่ 3 ใน 100

.....

P_{100} เรียกว่า เปอร์เซนไทล์ที่ 100 มีความหมายว่า มีจำนวนข้อมูลที่น้อยกว่าตำแหน่ง P_{100} อยู่ 100 ใน 100

P_{100} ไม่ได้ใช้ในการแบ่งข้อมูล

หลักการคำนวณควอร์ไทล์และเปอร์เซนไทล์

1. เรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปหามาก (ห้ามลืมเด็ดขาด!!)

2. หาดำแหน่งของข้อมูล เป็นการเปรียบเทียบจาก $N + 1$ เมื่อ N คือ จำนวนข้อมูล หาได้จากสูตร

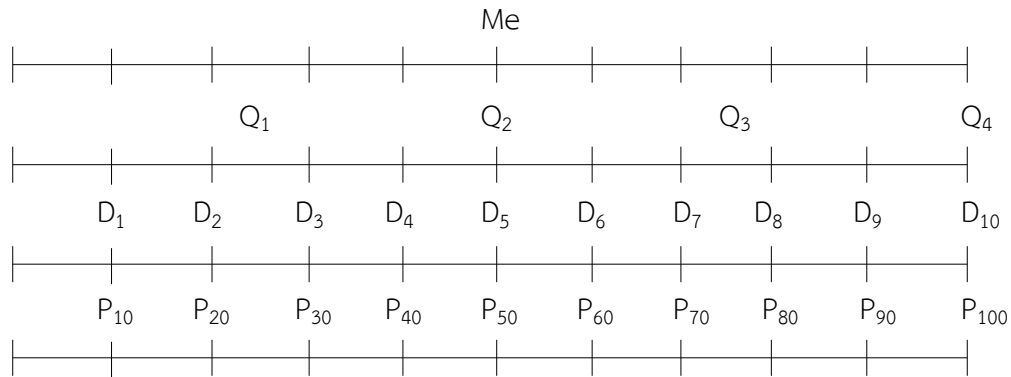
$$\begin{aligned} \text{ตำแหน่งที่ของมัธยฐาน} \quad Me &= \frac{1}{2}(N + 1) & \text{ตำแหน่งที่ของควอร์ไทล์ที่ } r & \quad Q_r = \frac{r}{4}(N + 1) \\ \text{ตำแหน่งที่ของเดไซล์ที่ } r & \quad D_r = \frac{r}{10}(N + 1) & \text{ตำแหน่งที่ของเปอร์เซนไทล์ที่ } r & \quad P_r = \frac{r}{100}(N + 1) \end{aligned}$$

3. หาค่าจากตำแหน่งของข้อมูล (ถ้าตำแหน่งข้อมูลไม่ลงตัวเช่น หา $Q_{2.4}$ ให้ใช้สูตรด้านล่าง)

ถ้ามีข้อมูลเป็น 5, 8, 9, 9, 10, 10, 12

ตำแหน่ง	ค่า
กลาง-บน	= กลาง-บน
ล่าง-บน	ล่าง-บน

จากการแบ่งข้อมูลทั้ง 4 รูปแบบ สามารถวาดเป็นแผนภาพได้ดังนี้



เช่น ถ้าข้อมูลเป็น **1 3 3 5 5 7 8 9 9 9 10**

- จงหา
- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| 1) Me = | 2) Q ₁ = | 3) Q ₂ = | 4) Q ₃ = |
| 5) D ₁ = | 6) D ₃ = | 7) D ₆ = | 8) D _{8.5} = |
| 9) P ₂₀ = | 10) P ₂₅ = | 11) P _{42.5} = | 12) P ₉₃ = |

ค่ากลางของข้อมูลหรือมัธยฐานเลขคณิต

มัธยฐานแปลว่า **กลาง** เช่น “มัธยฐานปฏิบัติ” คือการเดินทางสาย**กลาง**และมัธยฐานเลขคณิตก็คือ **ค่ากลางของข้อมูล** หรือ **ตัวแทนของข้อมูล**ของกลุ่มที่เราสนใจ โดยค่ากลางของข้อมูลที่ตีความจะสะท้อนให้เราเห็น **ภาพรวมของกลุ่ม**ข้อมูลได้ชัดเจน (ค่าที่ได้ออกมา ควรจะใกล้เคียงกับความเป็นจริง)

1. **ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Mean)** ค่าเฉลี่ยเลขคณิต เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ μ อ่านว่า มิว

$$\text{คำนวณได้จากสูตร } \mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N}$$

เมื่อ $\sum x_i$ คือ ผลรวมของข้อมูล และ N คือ จำนวนข้อมูล

เช่น ข้อมูลเป็น **1, 2, 3, 5, 5, 7, 9, 9, 9, 10**

$$\text{สมบัติสำคัญของ } \mu \text{ คือ } \sum_{i=1}^N (x_i - \mu) = 0 \text{ (พิสูจน์ได้โดยใช้สมบัติของซิกมา)}$$

หาก x และ y เป็นตัวแปรสองตัวที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้น คือ เขียนได้ในรูปสมการ $y = ax + b$

จะได้ว่า ค่าเฉลี่ยของ y คือ $\bar{y}$ และค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ ย่อมสอดคล้องกับสมการ $y = ax + b$ ด้วย นั่นคือ $\bar{y} = a\bar{x} + b$

สมบัตินี้มีประโยชน์ในการปรับแก้ค่าเฉลี่ย คือ เมื่อเรา**ปรับข้อมูลด้วยการบวกหรือการคูณข้อมูลทุกตัวด้วยจำนวนจริง** จะได้ว่า ค่าเฉลี่ยก็จะเปลี่ยนตามไปด้วย

เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างกำไร y และราคาทุน x ของสินค้าในร้านค้าแห่งหนึ่งเป็นไปตาม สมการ $y = 2x - 30$ ถ้าราคาทุนของสินค้า 5 ชนิด คือ 32, 33, 35, 36 และ 39 บาทแล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกำไรในการขายสินค้า 5 ชนิดนี้ เท่ากับเท่าใด

ค่าเฉลี่ยรวม (combined mean) ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก (weighted mean) ค่าเฉลี่ยที่ข้อมูลมีความถี่
ค่าเฉลี่ยรวมหาได้จากสูตร

ค่าเฉลี่ยรวม	$\mu = \frac{\sum \bar{\mu}_i N_i}{N_{All}} = \frac{\bar{\mu}_1 N_1 + \bar{\mu}_2 N_2 + \bar{\mu}_3 N_3 + \dots + \bar{\mu}_i N_i}{N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_i}$	ใช้สำหรับข้อมูลที่มีจำนวนมาให้
ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก	$\mu = \frac{\sum \bar{\mu}_i w_i}{w_{All}} = \frac{\bar{\mu}_1 w_1 + \bar{\mu}_2 w_2 + \bar{\mu}_3 w_3 + \dots + \bar{\mu}_i w_i}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_i}$	ใช้สำหรับข้อมูลที่มีน้ำหนักหรือหน่วยกิตที่ให้ความสำคัญต่างกัน
ค่าเฉลี่ยที่ข้อมูลมีความถี่	$\mu = \frac{\sum \bar{\mu}_i f_i}{f_{All}} = \frac{\bar{\mu}_1 f_1 + \bar{\mu}_2 f_2 + \bar{\mu}_3 f_3 + \dots + \bar{\mu}_i f_i}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i}$	ใช้สำหรับข้อมูลที่มีความถี่มาให้

*** จริง ๆ แล้ว จำแค่สูตรเดียวก็พอ เพราะ N, w, f ก็ใช้แทนกันได้กับโจทย์ในลักษณะเดียวกัน**

เช่น อายุเฉลี่ยของคนกลุ่มหนึ่งเท่ากับ 31 ปี ถ้าอายุเฉลี่ยของผู้หญิงในกลุ่มนี้เท่ากับ 25 ปี และอายุเฉลี่ยของผู้ชายกลุ่มนี้ เท่ากับ 35 ปี แล้ว อัตราส่วนจำนวนผู้หญิงต่อจำนวนผู้ชายในกลุ่มนี้เท่ากับข้อใดในกลุ่มนี้

1) 2 : 3

2) 2 : 5

3) 3 : 2

4) 3 : 5

เช่น ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนายคณิต ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นดังนี้

รหัสวิชา	ค 31101	ค 32101	ค 31102	ค 31202
จำนวนหน่วยกิต	1	1.5	1	1.5
เกรด	2.5	3	3.5	2

เกรดเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ของนายคณิตในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 2.60

2) 2.65

3) 2.70

4) 2.75

เช่น ตารางแจกแจงความถี่แสดงจำนวนนักเรียนในช่วงอายุต่าง ๆ ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นดังนี้

ช่วงอายุ (ปี)	ความถี่ (คน)
1 – 5	4
6 – 10	9
11 – 15	2
16 – 20	5

อายุเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 9 ปี

2) 9.5 ปี

3) 10 ปี

4) 10.5 ปี

2. มัธยฐาน (Median) ก็คือค่าที่เป็น**ตำแหน่งตรงกลาง** ของข้อมูลที่เรียงจากมากไปน้อยแล้ว ซึ่งวิธีการทำนั้นจะต้อง

1. เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก

2. หาค่าตำแหน่งตรงกลาง จาก $Me = \frac{1}{2}(N + 1)$

3. หาค่าจากตำแหน่ง

Ex.1 จงหามัธยฐานของข้อมูล 1, 2, 3, 5, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 11

Ex.2 จงหามัธยฐานของข้อมูล 1, 2, 3, 5, 5, 7, 9, 9, 9, 10

3. ฐานนิยม (mode) ฐานนิยม คือ ข้อมูลที่ปรากฏให้**เห็นซ้ำมากที่สุด** ข้อมูลชุดหนึ่ง อาจ**มีหรือไม่มีฐานนิยม**ก็ได้ ในกรณีที่มีฐานนิยม ฐานนิยมจะมีได้**มากที่สุดเพียง 2 ตัวเท่านั้น** ถ้ามีตัวซ้ำกันมากกว่า 2 ตัว จะถือว่า**ไม่มีฐานนิยม**

เช่น จงหาฐานนิยมของข้อมูลแต่ละชุดต่อไปนี้

ชุดที่ 1 1 8 5 3 4 6 3 3 1

ชุดที่ 2 2 2 8 7 3 6 2 3 3

ชุดที่ 3 4 4 3 4 5 5 7 5 2

ชุดที่ 4 3 2 4 1 9 8 5 11 6

ข้อดี - ข้อเสีย - สมบัติบางประการของค่ากลางแต่ละตัว

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

1. **คำนวณง่าย** ใช้กันแพร่หลายในการคำนวณสถิติระดับสูง
2. **ใช้ข้อมูลทุกตัว** ในการคำนวณ
3. ถ้าตารางแจกแจงความถี่เป็นแบบ**ขั้นเปิด** จะหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่ได้
4. ถ้าข้อมูลตัวใดตัวหนึ่งมี**ค่าน้อยหรือมากเป็นพิเศษ** จะส่งผลต่อค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งหมด (**ไม่ควรใช้ค่าเฉลี่ย**)

มัธยฐาน

1. ใช้ข้อมูลเพียงตัวเดียวหรือสองตัวในการคำนวณ เพราะเลือกมาจากข้อมูลที่อยู่**ตรงกลาง**
2. ในกรณีที่มีข้อมูลแต่ละตัวมี**ค่าต่างกันมาก** ไม่เกาะกลุ่มกัน คือ **สูงหรือต่ำผิดปกติ** (ควรใช้**มัธยฐาน**)

ฐานนิยม

1. เป็นค่ากลางที่ดีสำหรับ **ข้อมูลเชิงคุณภาพ**
2. ข้อมูลเชิงปริมาณก็ใช้ประโยชน์จากฐานนิยมได้ (**การเลือกตั้ง**)
3. ถ้าจำนวน**ข้อมูลมีน้อย** ค่าของฐานนิยม**ไม่ค่อยมีความหมาย**
4. เป็นค่ากลางที่**หยาบที่สุด**

การวัดการกระจายของข้อมูล

ในทางสถิติ เราวัดการกระจายของข้อมูล**เพื่อดูว่า**ค่าของข้อมูลในชุดนั้นมี**ความแตกต่างกัน**มากน้อยเพียงใด โดยค่าที่ใช้วัดการกระจายของข้อมูล คือ **พิสัย** และ **ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน**

1. **พิสัย (range)** เป็นค่าทางสถิติที่ใช้วัดการกระจาย**อย่างง่าย** คำนวณได้จากผลต่างของข้อมูลที่มี**ค่าสูงสุด**กับข้อมูลที่มี**ค่าต่ำสุด**อยู่ นั่นคือ $\text{พิสัย} = X_{\max} - X_{\min}$
เช่น มีข้อมูลเป็น 1, 2, 3, 5, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 11 จะได้พิสัยเป็น

2. **ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation: S.D.)** เป็นค่าที่ใช้**วัดการกระจายได้ดีที่สุด**

มี 2 สูตรในการคำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$S.D. = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$$

สมบัติสำคัญของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

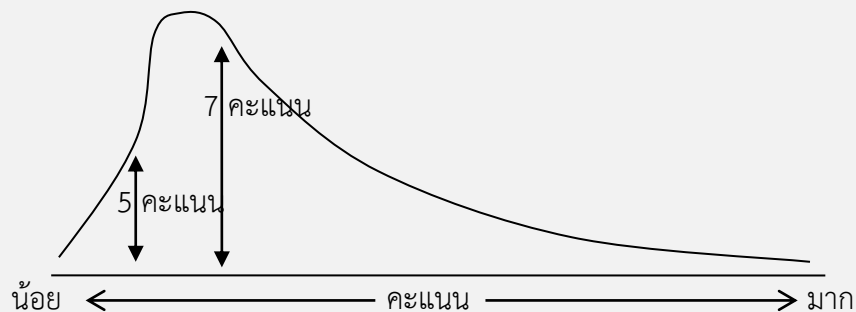
1. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ (**$S.D. \geq 0$**)
2. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน**เป็นศูนย์** เมื่อข้อมูล**ทุกตัวมีค่าเท่ากัน**
3. **ความแปรปรวน = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน²**
4. การ**บวกหรือลบ**ข้อมูลทุกตัวด้วยค่าคงที่ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจะไม่เปลี่ยนแปลง

เช่น จงคำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลต่อไปนี้ 1, 2, 3, 5, 5, 7, 9, 9, 9, 10

ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความถี่ ค่ากลาง และการกระจาย

โค้งความถี่ได้จากการปรับจากฮิสโตแกรมให้เป็นเส้นโค้ง โดยแกนนอนแสดงตัวแปร ส่วนความสูงของกราฟจะแสดงความถี่ของข้อมูล นั่นคือ ถ้ากราฟโค้งที่ตรงไหน แสดงว่าตรงนั้นมีจำนวนข้อมูลอยู่เยอะ

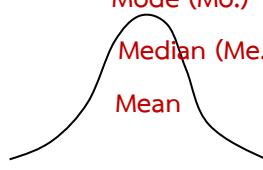
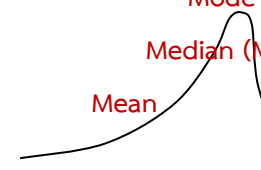
พิจารณาเส้นโค้งความถี่แสดงคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้อง 3/8



จะสรุปได้ว่า

1. นักเรียนส่วนใหญ่สอบได้คะแนนค่อนข้างน้อย (สังเกตว่าโค้งเอียงทางด้านน้อย)
2. จำนวนนักเรียนที่สอบได้ 5 คะแนน น้อยกว่า จำนวนนักเรียนที่สอบได้ 7 คะแนน (ความสูงของเส้นโค้งตรง 5 คะแนนมีความเตี้ยกว่า 7 คะแนน เพราะความสูงของเส้นโค้งคือความถี่)

เส้นโค้งความถี่แบ่งออกได้เป็น 3 แบบ ดังนี้

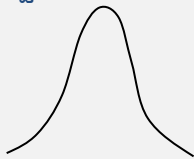
	โค้งเบ้ขวา	โค้งปกติ	โค้งเบ้ซ้าย
รูปโค้ง			
สมบัติ	Mo. < Me. < Mean	Mo. = Me. = Mean	Mo. > Me. > Mean
ถ้าเป็นคะแนนสอบ	ข้อสอบยาก คนส่วนใหญ่ได้คะแนนน้อย	คนที่ทำได้เท่ากับคนที่ทำไม่ได้	ข้อสอบง่าย คนส่วนใหญ่ได้คะแนนมาก
ลักษณะกราฟ	หางอยู่ขวา โค้งจึงเบ้ขวา	โค้งสมมาตรเท่ากันทั้งสองด้าน	หางอยู่ซ้าย โค้งจึงเบ้ซ้าย

ข้อสังเกต

- (1) มัธยฐาน (Me.) จะต้องอยู่ตรงกลาง เพราะตำแหน่งต้องตรงกลาง
- (2) ตำแหน่งที่สูงสุดของโค้ง คือ เป็นตำแหน่งของฐานนิยม (Mode) เพราะความถี่มากที่สุด
- (3) ตำแหน่งของค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Mean) คือ อีกฝั่งตรงข้ามกับฐานนิยม (Mode) เสมอ

การพิจารณาว่าข้อมูลกระจายมากหรือกระจายน้อย ดูได้จากการแผ่ของเส้นโค้ง

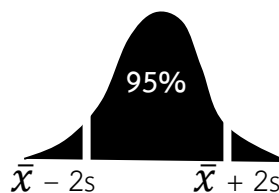
ถ้าเส้นโค้งโด่ง ฐานแคบ แสดงว่ามีการกระจายน้อย



ถ้าเส้นโค้งแบน ฐานกว้าง แสดงว่ามีการกระจายมาก



ไม่ว่าข้อมูลจะมีการแจกแจงแบบใด พบว่า จำนวนข้อมูลจะมีค่าเบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ยเลขคณิต ไม่เกินกว่า 2 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ซึ่งมีอยู่ประมาณ 95% (เรียกความจริงนี้ว่า 95% rule) ทั้งนี้ พื้นที่ใต้โค้งในช่วงใด ๆ แสดงถึงจำนวนข้อมูลในช่วงนั้น ๆ



จะเห็นว่า ข้อมูลส่วนใหญ่ คือ ข้อมูลที่มีค่าอยู่ในช่วง $\bar{X} - 2s$ จนถึง $\bar{X} + 2s$

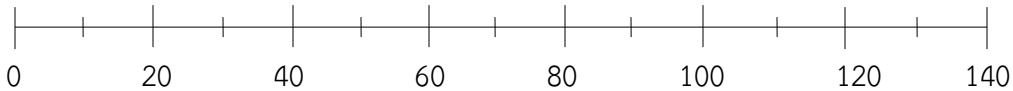
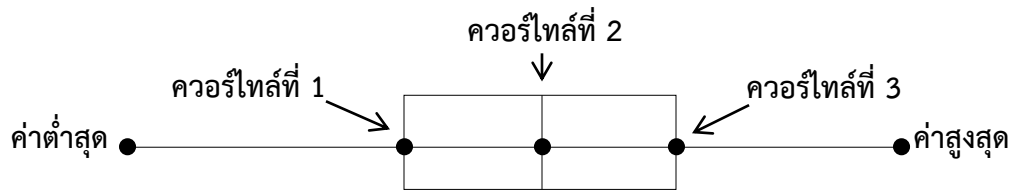
จาก 95% rule เราประมาณว่าค่าสูงสุดของข้อมูล คือ $\bar{X} + 2s$ และค่าต่ำสุดของข้อมูล คือ $\bar{X} - 2s$

$$\text{จะได้ว่า พิสัย} = (\bar{X} + 2s) - (\bar{X} - 2s) = 4s$$

ดังนั้น เราสามารถประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) เมื่อรู้พิสัย ได้จากความสัมพันธ์

$$4\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน} = \text{พิสัย}$$

แผนภาพกล่อง แผนภาพกล่อง เป็นแผนภาพที่แสดง ค่าสรุปทั้ง 5 คือ
ค่าต่ำสุด, ค่าสูงสุด, ควอร์ไทล์ที่ 1, ควอร์ไทล์ที่ 2 และ ควอร์ไทล์ที่ 3



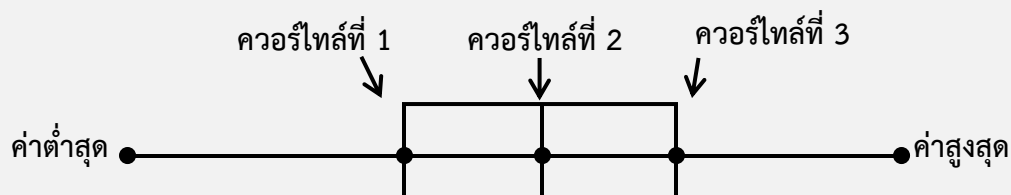
จากแผนภาพกล่องจะได้ว่า

ค่าต่ำสุด	ควอร์ไทล์ที่ 1	ควอร์ไทล์ที่ 2	ควอร์ไทล์ที่ 3	ค่าสูงสุด

5 ค่าในแผนภาพกล่องจะแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วน เพราะค่าทั้งสามที่แบ่ง คือ ควอร์ไทล์ที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ทำให้ประมาณได้ว่า จำนวนข้อมูลของทั้ง 4 ช่วงของคะแนนมีอยู่เท่า ๆ กัน นั่นคือ

จำนวนคนในช่วงคะแนน	20 – 60	60 – 80	80 – 100	100 – 130
เปอร์เซ็นต์				

* ช่วงของแผนภาพกล่อง**ยัง**แค่**ไม่**ใช้ว่าจำนวนข้อมูล**ยัง**เยอะ แต่มีความหมายว่า**ยัง**แค่ ข้อมูล**ยัง**หนาแน่น ดังภาพนี้



ข้อสอบ คณิตศาสตร์ O-NET 57

ตอนที่ 1 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก ข้อละ 2.5 คะแนน

1. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$

ข. ถ้า $a|bc| < 0$ และ $b < 0$ แล้ว $|ab|c < 0$

ค. ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $a + b \geq \sqrt{2ab}$

ข้อใดถูก

1) ก. และ ข. ถูก แต่ ค. ผิด

2) ก. และ ค. ถูก แต่ ข. ผิด

3) ข. และ ค. ถูก แต่ ก. ผิด

4) ข. ถูก แต่ ก. และ ค. ผิด

5) ค. ถูก แต่ ก. และ ข. ผิด

2. ให้ $A = 2^{\frac{5}{6}}, B = 3^{\frac{1}{2}}$ และ $C = 5^{\frac{1}{3}}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1) $A < B < C$

2) $B < A < C$

3) $B < C < A$

4) $C < A < B$

5) $C < B < A$

3. ให้ $a = \sqrt{18} - \sqrt{12}$ และ $b = \sqrt{75} - \sqrt{50}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. a และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ

ข. $3a < 2b$

ค. $a + b < 2$

ข้อใดถูก

1) ก. และ ข. ถูก แต่ ค. ผิด

2) ก. และ ค. ถูก แต่ ข. ผิด

3) ข. และ ค. ถูก แต่ ก. ผิด

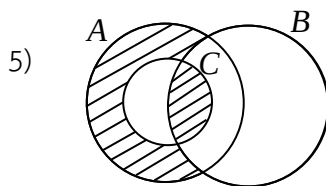
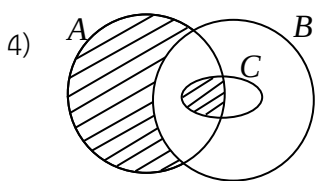
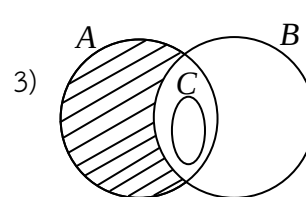
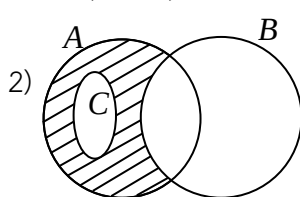
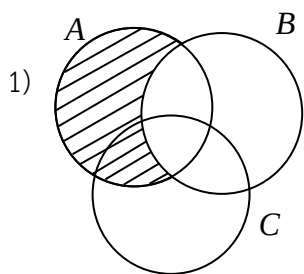
4) ค. ถูก แต่ ก. และ ข. ผิด

5) ก. ถูก แต่ ข. และ ค. ผิด

4. ถ้า $a = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ แล้ว $\sqrt{a + \frac{1}{a} - 2}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 3 2) 4 3) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ 4) $3\sqrt{2}$ 5) $4\sqrt{5}$

5. ส่วนที่แรเงาของแผนภาพในข้อใดหมายถึง $A - (B - C)$



6. พิจารณาผลสรุปต่อไปนี้

- | | | |
|----|------|-------------------------------------|
| ก. | เหตุ | 1) ทุกครั้งที่ฝนตก การจราจรจะติดขัด |
| | ผล | วันนี้ฝนตก |
| ข. | เหตุ | 1) ดำไม่ชอบกินผัก |
| | ผล | 2) ทุกคนที่กินผักมีสายตาดำ |
| | ผล | ดำสายตาดำไม่ดี |
| ค. | เหตุ | 1) ผู้ที่ประหยัดจะไม่ยากจน |
| | ผล | 2) นายมีเป็นคนยากจน |
| | ผล | นายมีเป็นคนไม่ประหยัด |

ข้อใดถูก

- 1) ก., ข. และ ค. สมเหตุสมผล 2) ก. และ ข. สมเหตุสมผล แต่ ค. ไม่สมเหตุสมผล
 3) ข. และ ค. สมเหตุสมผล แต่ ก. ไม่สมเหตุสมผล 4) ค. สมเหตุสมผล แต่ ก. และ ข. ไม่สมเหตุสมผล
 5) ก., ข. และ ค. ไม่สมเหตุสมผล

7. ถ้า $A = \left\{ x \mid 9^{x^2} = (1 + \sqrt[3]{8})^x \right\}$ แล้ว ผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน A มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) $-\frac{1}{2}$ 2) 0 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1 5) $\frac{3}{2}$

8. ถ้า $64^k = 16$ แล้ว $8^k + 8^{-k}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 0 2) $\frac{5}{4}$ 3) $\frac{5}{2}$ 4) $\frac{17}{4}$ 5) $\frac{65}{8}$

9. ผลบวกของรากทั้งหมดของสมการ $\frac{x-1}{x+2} + x = 1$ เท่ากับข้อใด

- 1) -4 2) -3 3) -2 4) 1 5) 2

10. ถ้า $A = \left\{ x \mid |x+1| + 1 > 2 \right\}$ แล้ว ช่วงในข้อใดเป็นสับเซตของ A

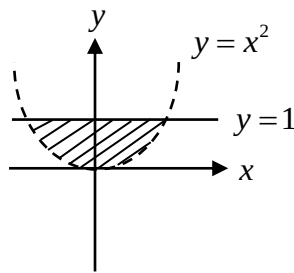
- 1) $(-4, -2]$ 2) $(-3, -1)$ 3) $[-1, 0)$ 4) $[0, 2)$ 5) $[2, 3)$

11. กำหนดให้ $A = \{x \mid |x-2| < 3\}$ และ $B = \{x \mid x^2 - 3x - 4 > 0\}$ สมาชิกของ $A - B$ ที่เป็นจำนวนเต็มมีกี่ตัว

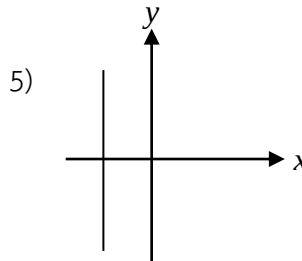
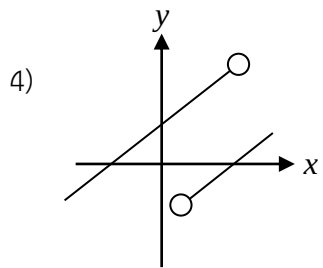
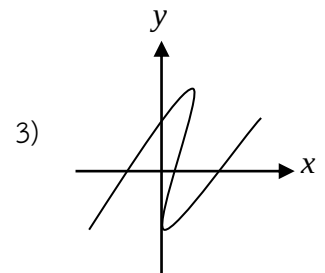
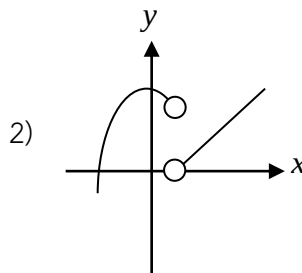
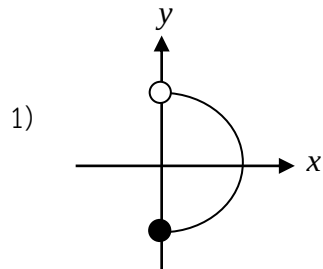
- 1) 3 2) 4 3) 5 4) 6 5) 7

12. บริเวณที่แรเงาเป็นกราฟของความสัมพันธ์ในข้อใด

- 1) $\{(x, y) \mid x^2 - y < 0 \text{ และ } y \leq 1\}$
 2) $\{(x, y) \mid x^2 - y < 0 \text{ และ } y \geq 1\}$
 3) $\{(x, y) \mid x^2 - y \geq 0 \text{ และ } y < 1\}$
 4) $\{(x, y) \mid x^2 - y \geq 0 \text{ และ } y > 1\}$
 5) $\{(x, y) \mid x^2 - y > 0 \text{ และ } y \leq 1\}$



13. กราฟในข้อใดแสดงว่า y เป็นฟังก์ชันของ x



14. กำหนดให้ $f(x) = (x-3)^2 - 4$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. กราฟของ f เป็นพาราโบลาหงาย

ข. ถ้า $x \in (1, 4]$ แล้ว $f(x) < 0$

ค. ถ้ากราฟของ f ตัดแกน y ที่จุด $(0, a)$ และค่าต่ำสุดของ f คือ b แล้ว $a + b = 1$

ข้อใดถูก

1) ก., ข. และ ค. ถูกทั้งสามข้อ

2) ก. และ ข. ถูก แต่ ค. ผิด

3) ก. และ ค. ถูก แต่ ข. ผิด

4) ก. ถูก แต่ ข. และ ค. ผิด

5) ข. ถูก แต่ ก. และ ค. ผิด

15. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีมุม $\hat{B} = 90^\circ$ และมี BD เป็นเส้นความสูงของรูปสามเหลี่ยม ถ้ามุม $\hat{A} = 60^\circ$ และ AD ยาว 2 หน่วย แล้ว CD จะยาวกี่หน่วย

1) 4

2) $4\sqrt{3}$

3) 6

4) $6\sqrt{3}$

5) 8

16. กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่ 100 ตารางหน่วย ถ้า $\tan(\hat{BAC}) = \tan(90^\circ - \hat{ACD})$ แล้ว สี่เหลี่ยม $ABCD$ มีเส้นรอบรูปยาวกี่หน่วย

1) 40

2) 50

3) 58

4) 104

5) 202

17. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ระหว่างตึกสองหลัง ถ้าชายคนนี้มีมองยอดตึกที่หนึ่งด้วยมุมเงย 30° แล้วหันหลังกลับ เขาจะมองเห็นยอดตึกที่สองด้วยมุมเงย 60° สมมติว่าตึกที่สองสูงกว่าตึกที่หนึ่ง $20\sqrt{3}$ เมตร และตึกทั้งสองห่างกัน 100 เมตร ชายคนนี้จะยืนอยู่ห่างจากตึกที่หนึ่งกี่เมตร

- 1) $30\sqrt{3}$ 2) $40\sqrt{2}$ 3) 60 4) 62 5) 70

18. เมื่อวางบันไดยาว 4 เมตร พาดกับผนัง บันไดจะทำมุม 30° กับพื้น ถ้าเลื่อนปลายบนของบันไดให้สูงขึ้นอีก 1 เมตร ปลายล่างของบันไดจะเลื่อนจากจุดเดิมเข้าหาผนังเป็นระยะทางกี่เมตร

- 1) $2\sqrt{3}-\sqrt{7}$ 2) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ 3) 1 4) $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ 5) $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$

19. ถ้า $a_n = \frac{2-(-1)^n n}{2n+3}$ แล้วข้อใดถูก

- 1) $a_1 = \frac{1}{5}$ 2) $a_2 = \frac{4}{7}$ 3) $a_3 = -\frac{1}{9}$ 4) $a_4 = \frac{2}{11}$ 5) $a_5 = \frac{7}{13}$

20. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตและผลต่างร่วมไม่เป็นศูนย์ แล้ว ข้อใดผิด

- 1) $|a_{10} - a_{11}| = |a_{21} - a_{20}|$
 2) $a_9 + a_{14} = a_{11} + a_{12}$
 3) $\frac{a_{15} - a_{12}}{a_7 - a_4} = 1$
 4) ถ้า $b_n = a_n - 5$ ทุก ๆ n แล้ว $b_1, b_2, b_3, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต
 5) ถ้า $c_n = 5^n a_n$ ทุก ๆ n แล้ว $c_1, c_2, c_3, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต

21. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $5-7x$, $3x+28$, $5x+27$, ..., $2x^3-3x+1$ เป็นลำดับเลขคณิต แล้วลำดับนี้มีกี่พจน์

- 1) 10 2) 11 3) 12 4) 13 5) 14

22. ชุงกองหนึ่งวางเรียงซ้อนกันเป็นชั้น ๆ โดยชั้นบนจะมีจำนวนน้อยกว่าชั้นล่างที่อยู่ติดกัน 3 ต้นเสมอ ถ้าชั้นบนสุดมี 49 ต้น และชั้นล่างสุดมี 211 ต้น แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. ชุงกองนี้มี 56 ชั้น ข. ชั้นที่ 8 (นับจากบนลงล่าง) มีชุง 70 ต้น
ค. ชุงกองนี้มีทั้งหมด 7,150 ต้น

ข้อใดถูก

- 1) ก., ข. และ ค. ถูกทั้งสามข้อ 2) ข. ถูก แต่ ก. และ ค. ผิด 3) ค. ถูก แต่ ก. ถูก และ ข. ผิด
4) ก. และ ค. ถูก แต่ ข. ผิด 5) ข. และ ค. ถูก แต่ ก. ผิด

23. ถ้าพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิตเป็น $\frac{1}{2}$ และ $-\frac{1}{16}$ ตามลำดับแล้วพจน์ที่ 4 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -1 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $-\frac{1}{4}$ 4) 1 5) 2

24. พจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิตเป็น $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \dots$ ตรงกับข้อใด

- 1) $8\sqrt{6}$ 2) $16\sqrt{3}$ 3) $16\sqrt{6}$ 4) $32\sqrt{3}$ 5) $32\sqrt{6}$

25. ถ้าอนุกรมเรขาคณิตมี $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $a_{10} = 256$ แล้วผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับข้อใด

- 1) 511.0 2) 511.5 3) 512.0 4) 512.5 5) 513.0

26. ครอบครัวหนึ่งมีพ่อ แม่ และลูก 2 คน ไปเที่ยวสวนสนุกแห่งหนึ่ง ถ้าจัดคนทั้งสี่คนถ่ายรูปกับรูปปั้นโดราเอมอน โดยยืนเรียงกันให้โดราเอมอนอยู่ตรงกลาง และลูกทั้งสองคนไม่ยืนติดกัน จะมีจำนวนวิธีจัดได้กี่วิธี

- 1) 8 2) 10 3) 12 4) 16 5) 18

27. กนกมีถุงเท้าสีขาว 1 คู่ สีน้ำเงิน 2 คู่ และสีดำ 3 คู่ เขาใส่ถุงเท้าไว้ในลิ้นชักโดยไม่ได้จัดแยกเป็นคู่ ถ้าเขาสุ่มหยิบถุงเท้าจากลิ้นชักมา 2 ข้างแล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าสีเดียวกันมีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) $\frac{1}{66}$ 2) $\frac{1}{22}$ 3) $\frac{1}{11}$ 4) $\frac{1}{6}$ 5) $\frac{1}{3}$

28. ข้อใดเป็นขั้นตอนหนึ่งของการสำรวจความคิดเห็น

- 1) ตั้งสมมติฐานของปัญหาที่ทำการสำรวจ
- 2) กำหนดขอบเขตของการสำรวจ
- 3) ประเมินค่าใช้จ่ายในการสำรวจความคิดเห็น
- 4) คัดเลือกผู้เก็บข้อมูลการสำรวจ
- 5) นำผลการสำรวจความคิดเห็นไปใช้ประโยชน์

29. ค่ากลางของข้อมูลในข้อใดมีความเหมาะสมที่จะใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลของกลุ่ม

- 1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของขนาดรองเท้าของนักเรียนห้องหนึ่ง
- 2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนผู้โดยสารรถไฟฟ้าใต้ดินต่อวันในเดือน มกราคม พ.ศ. 2557
- 3) มัธยฐานของน้ำหนักตัวของคนไทยในปี พ.ศ. 2556
- 4) ฐานนิยมของความสูงของนักกีฬาไทยที่ได้รับเหรียญทองจากการแข่งขันกีฬาโอลิมปิก
- 5) ค่ากึ่งกลางระหว่างมัธยฐานกับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น ม.6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง

30. จากแผนภาพต้น – ใบของข้อมูลชุดหนึ่งเป็นดังนี้

0	7	8	9	
1	0	1	5	7
2	1	2	2	
3	0	2		

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อสรุปที่ถูกต้องของข้อมูลชุดนี้

- 1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 16 และ มัธยฐาน = 16
- 2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 16.5 และ มัธยฐาน = 17
- 3) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 17 และ มัธยฐาน = 17
- 4) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 17 และ มัธยฐาน = 16
- 5) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 17.5 และ มัธยฐาน = 16

31. ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง (เรียงจากน้อยไปมาก) เป็นดังนี้

29, 35, 36, 40, 41, 43, 47, 50, 56, 59

60, 61, 63, 65, 72, 72, 74, 75, 75, 78

78, 78, 80, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 89

90, 90, 91, 91, 91, 92, 95, 95, 95, 97

เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 70 ของคะแนนสอบนี้เท่ากับข้อใด

- 1) 87
- 2) 87.5
- 3) 87.7
- 4) 87.9
- 5) 88

32. ข้อมูลชุดหนึ่งเรียงจากน้อยไปมาก ดังนี้ 5 10 12 20 x 26 30 42 47 y

ถ้าข้อมูลชุดนี้มีพิสัยเท่ากับ 45 และค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 26.4 แล้ว ควอไทล์ที่สองของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใด

- 1) 20
- 2) 21
- 3) 23
- 4) 24
- 5) 25

ตอนที่ 2 แบบเติมคำตอบ ข้อละ 2.5 คะแนน

33. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 5\}$

ถ้า $r = \{(a, b) \in A \times B \mid a \geq b - 1\}$ แล้ว r มีจำนวนสมาชิกกี่ตัว

34. ถ้า $A = \{(x, y) \mid |x + 1| \leq y \text{ และ } y \leq 2\}$ แล้ว พื้นที่ของบริเวณ A เท่ากับกี่ตารางหน่วย

35. จากการสอบถามความชอบรับประทานไอศกรีมของนักเรียนจำนวน 180 คน พบว่า

มี 86 คน ชอบรสช็อกโกแลต

มี 31 คน ชอบรสช็อกโกแลตและวานิลลา

มี 87 คน ชอบรสวานิลลา

มี 27 คน ชอบรสวานิลลาและสตรอเบอรี่

มี 70 คน ชอบรสสตรอเบอรี่

มี 22 คน ชอบรสช็อกโกแลตและสตรอเบอรี่

และมี 5 คน ไม่ชอบทั้งสามรส ดังนั้น มีนักเรียนที่ชอบทั้งสามรสกี่คน

36. ถ้าอนุกรมเลขคณิตมีพจน์แรกเป็น -8 และมีผลบวกของ 50 พจน์แรกเป็น 3275 แล้วผลต่างร่วมมีค่าเท่ากับเท่าใด

37. แม่ค้าขายกล้วยเดี่ยวชามละ 25 บาท โดยมีค่าเช่าร้านวันละ 120 บาท และต้นทุนค่าวัตถุดิบทั้งหมดคิดเป็นชามละ 18 บาท ถ้าต้องการขายให้ได้กำไรไม่ต่ำกว่าวันละ 500 บาท เขาต้องขายให้ได้อย่างน้อยวันละกี่ชาม

38. ห้องประชุมแห่งหนึ่งจัดที่นั่งเป็นแถวโดยนำโต๊ะมาเรียงต่อกันเป็นแถว แถวละ 5 ตัว หลังจากจัดแล้วได้ที่นั่งทั้งหมด 60 ที่นั่ง ถ้าจำนวนแถวน้อยกว่าจำนวนที่นั่งในแต่ละแถวอยู่ 4 ห้องประชุมมีโต๊ะทั้งหมดกี่ตัว
39. ข้อมูลชุดที่หนึ่งมี 10 จำนวน คือ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ ซึ่งข้อมูลชุดนี้มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.3 ถ้าข้อมูลชุดที่สองมี 10 จำนวน คือ $3x_1 + 174, 3x_2 + 174, 3x_3 + 174, \dots, 3x_{10} + 174$ แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าไร
40. ถ้าแต่ละวันในเดือนสิงหาคม มีความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกตอนเช้าหรือตอนเย็นเท่ากับ 0.86 ความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกตอนเย็นเท่ากับ 0.67 และความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกทั้งตอนเช้าและตอนเย็นเท่ากับ 0.35 แล้วความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกในตอนเช้ามีค่าเท่ากับข้อใด

เฉลย

1. 5)	9. 3)	17. 3)	25. 2)	33. 5)
2. 5)	10. 5)	18. 1)	26. 4)	34. 4)
3. 1)	11. 3)	19. 5)	27. 5)	35. 12
4. 2)	12. 1)	20. 5)	28. 2)	36. 3
5. 4)	13. 2)	21. 2)	29. 2)	37. 89
6. 4)	14. 1)	22. 5)	30. 4)	38. 30
7. 3)	15. 3)	23. 1)	31. 3)	39. 6.9
8. 4)	16. 1)	24. 3)	32. 4)	40. 0.54

ข้อสอบ คณิตศาสตร์ O-NET 56

ตอนที่ 1 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก ข้อละ 2.5 คะแนน

1. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $ab = ac$ แล้วจะได้ว่า $b = c$

(ข) ถ้า $a < b$ แล้วจะได้ว่า $a^2 < b^2$

(ค) ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้วจะได้ว่า $ab < bc$

ข้อใดถูก

- 1) (ก), (ข) และ (ค) ถูก 2) (ก) ถูก แต่ (ข) และ (ค) ผิด 3) (ก) และ (ค) ถูก แต่ (ข) ผิด
4) (ข) ถูก แต่ (ก) และ (ค) ผิด 5) (ก), (ข) และ (ค) ผิด

2. ข้อใดต่อไปนี้ที่มีจำนวนตรรกยะอยู่เพียงสองจำนวน

- 1) $-\sqrt{4}, \pi - \frac{22}{7}, 1.010010001$ 2) $\sqrt[3]{2}, \sqrt{8}, \pi^2$
3) $\pi + 1, \sqrt{16}, 0.101001000100001...$ 4) $\frac{9}{11}, 1.11111..., \sqrt[3]{8}$
5) $0.\dot{8}, \sqrt{8} - \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$

3. ให้ $A = \sqrt{2} - 1.4, B = \pi - 3.1$ และ $C = \frac{5}{3} - 1.6\bar{3}$ ข้อใดถูก

- 1) $A < B < C$ 2) $C < A < B$ 3) $B < A < C$ 4) $C < B < A$ 5) $A < C < B$

4. ค่า $\frac{1}{(1-\sqrt{3})^2}$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

- 1) [1.5, 1.6) 2) [1.6, 1.7) 3) [1.7, 1.8) 4) [1.8, 1.9) 5) [1.9, 2.0)

5. $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}-1} \div \frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{3}}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $-\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{2}$ 5) $\frac{1}{2}$

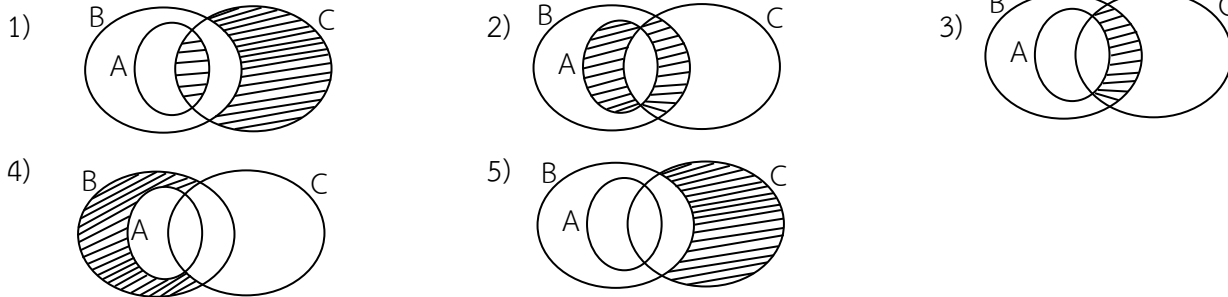
6. ให้ $A = \{x \mid (2x-1)(4-3x) > 0\}$ ข้อใดเป็นเซตย่อยของ A

- 1) $(-1.2, -0.2)$ 2) $(-0.9, 0.3)$ 3) $(-0.6, 1.2)$ 4) $(0.4, 1.5)$ 5) $(0.3, 1.3)$

7. ถ้า $2^{x-1} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) $-\frac{5}{2}$ 2) $-\frac{3}{2}$ 3) $-\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$ 5) $\frac{3}{2}$

8. เซต $(B-A)' \cap C$ คือบริเวณที่แรเงาในข้อใด



9. จงพิจารณาผลสรุปต่อไปนี้

- (ก) เหตุ 1) ทุกคนที่ผ่านหนังสือก่อนสอบจะสอบได้
2) สมชายสอบได้

ผล สมชายอ่านหนังสือก่อนสอบ

- (ข) เหตุ 1) ทุกครั้งที่ฝนตกจะมีฟ้าแลบ
2) วันนี้ไม่มีฟ้าแลบ

ผล วันนี้ฝนไม่ตก

- (ค) เหตุ 1) แมวบางตัวไม่ชอบกินปลา
2) เหมียวเป็นแมวของฉัน

ผล เหมียวไม่ชอบกินปลา

ข้อใดถูก

- 1) (ก), (ข) และ (ค) สมเหตุสมผล 2) (ก) และ (ข) สมเหตุสมผล แต่ (ค) ไม่สมเหตุสมผล
3) (ข) และ (ค) สมเหตุสมผล แต่ (ก) ไม่สมเหตุสมผล 4) (ข) สมเหตุสมผล แต่ (ค) และ (ก) ไม่สมเหตุสมผล
5) (ก), (ข) และ (ค) ไม่สมเหตุสมผล

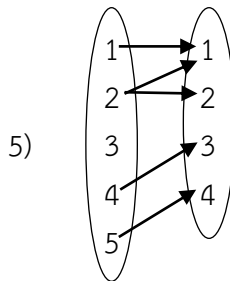
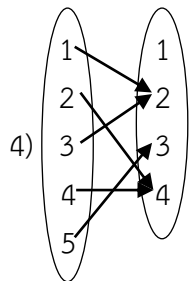
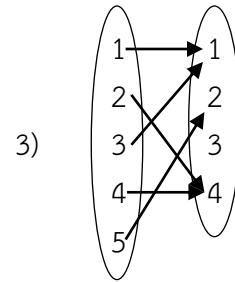
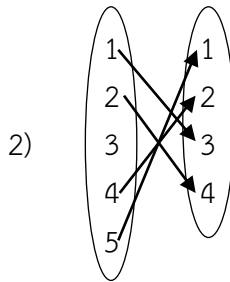
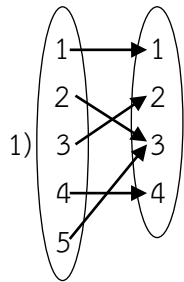
10. กัลยามีธุรกิจให้เช่าหนังสือ เธอพบว่า ถ้าคิดค่าเช่าหนังสือเล่มละ 10 บาท จะมีหนังสือถูกเช่าไป 100 เล่มต่อวัน แต่ถ้าเพิ่มค่าเช่าเป็น 11 บาท จำนวนหนังสือที่ถูกเช่าจะเป็น 98 เล่มต่อวัน และถ้าเพิ่มค่าเช่าเป็น 12 บาท จำนวนหนังสือที่ถูกเช่าจะเป็น 96 เล่มต่อวัน กล่าวคือ จำนวนหนังสือที่ถูกเช่าต่อวันจะลดลง 2 เล่ม ทุก ๆ 1 บาทของค่าเช่าที่เพิ่มขึ้น ถ้า x คือจำนวนเงินส่วนที่เพิ่มขึ้นของค่าเช่าต่อเล่ม และ y คือรายได้จากค่าเช่าหนังสือต่อวัน (หน่วย : บาท) แล้ว ข้อใดคือสมการแสดงรายได้ต่อวันจากธุรกิจนี้ของกัลยา

- 1) $y = 1000 + 80x - 2x^2$ 2) $y = 1000 - 80x - 2x^2$ 3) $y = 1000 + 80x - x^2$
 4) $y = 500 - 40x - x^2$ 5) $y = 500 + 40x - x^2$

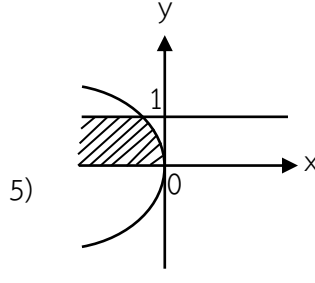
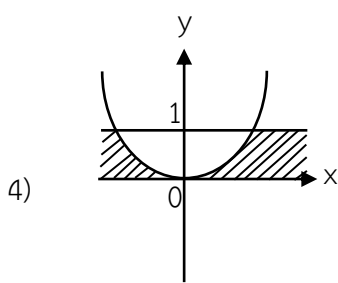
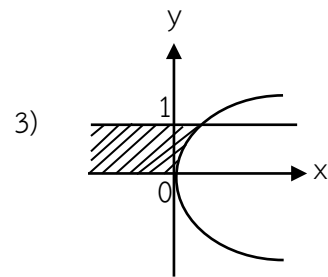
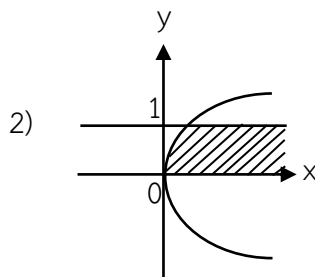
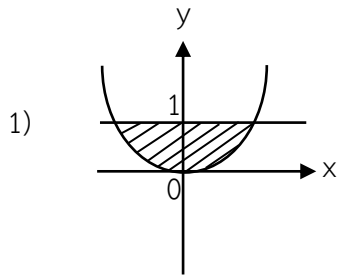
11. ถ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านยาว ยาวกว่าด้านกว้างอยู่ 3 ฟุต และเส้นทแยงมุมยาวกว่าด้านกว้างอยู่ 7 ฟุต แล้ว เส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมนี้ยาวกี่ฟุต

- 1) $11 + 4\sqrt{14}$ 2) $11 + 8\sqrt{21}$ 3) $22 + 4\sqrt{14}$
 4) $22 + 4\sqrt{21}$ 5) $22 + 8\sqrt{14}$

12. แผนภาพของความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชันที่มี $\{1,2,3,4,5\}$ เป็นโดเมนและ $\{1,2,3,4\}$ เป็นเรนจ์



13. บริเวณที่แรเงาในข้อใดเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$



14. ถ้า $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$ แล้วเรนจ์ของ f คือเซตในข้อใด

1) $\{y \mid -1 < y \leq 0\}$

2) $\{y \mid -1 \leq y < 0\}$

3) $\{y \mid y < -1 \text{ หรือ } y > 0\}$

4) $\{y \mid y < -1 \text{ หรือ } y \geq 0\}$

5) $\{y \mid y \leq -1 \text{ หรือ } y > 0\}$

15. ถ้า $y^2 - x = 1$ แล้ว xy^2 มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับข้อใด

1) $-\frac{1}{2}$

2) $-\frac{1}{4}$

3) $-\frac{1}{8}$

4) $\frac{1}{4}$

5) $\frac{1}{2}$

16. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เท่ากับ 45° และ D เป็นจุดบนด้าน BC ที่ทำให้ AD เป็นเส้นความสูงของสามเหลี่ยม ถ้าด้าน BD ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว $3a$ หน่วย แล้ว ด้าน AC มีความยาวเท่ากับกี่หน่วย

- 1) $2a$ 2) $\sqrt{6}a$ 3) $4a$ 4) $5a$ 5) $6a$

17. ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมี E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CD ถ้ามุม $\widehat{AEB} = 90^\circ$ แล้ว $\sin \widehat{BAC}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 4) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 5) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

18. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ด้าน BC ยาว a หน่วยและด้าน AC ยาว $a + 8$ หน่วย ถ้า $\cot(90^\circ - B) = 3$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 2 2) 3 3) 4 4) 5 5) 6

19. อิทธิยืนอยู่บนยอดประภาคารสูง 30 เมตร เห็นเรือสองลำจอดอยู่ในทะเลทางทิศตะวันออกในแนวเส้นตรงเดียวกัน โดยที่สายตาของเขาทำมุมกับ α องศาเมื่อมองเรือลำที่หนึ่ง และทำมุมกับ β องศาเมื่อมองเรือลำที่สอง ถ้าเรือสองลำอยู่ห่างกัน 80 เมตร และ $\alpha + \beta = 90$ องศา แล้วเรือลำที่อยู่ไกลจากฝั่งที่สุดอยู่ห่างจากจุดที่ตั้งประภาคารกี่เมตร

- 1) 90 2) 100 3) 120 4) 150 5) 170

20. ถ้าพจน์ที่ 5 และ พจน์ที่ 10 ของลำดับเลขคณิตเป็น 14 และ 29 ตามลำดับ แล้วพจน์ที่ 99 เท่ากับข้อใด

- 1) 276 2) 287 3) 296 4) 297 5) 299

21. ลำดับ $-24, -15, -6, 3, 12, 21, \dots, 1776$ มีกี่พจน์

- 1) 199 2) 200 3) 201 4) 202 5) 203

22. ถ้า $a_1 = 2, a_2 = 1$ และ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ แล้ว a_{11} เท่ากับข้อใด

- 1) 76 2) 113 3) 123 4) 199 5) 384

23. ถ้าพจน์ที่ n ของอนุกรมคือ $3n - 10$ แล้วผลบวก 23 พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับข้อใด

- 1) 589 2) 598 3) 624 4) 698 5) 759

24. ถ้าอนุกรมเรขาคณิตมีผลบวก 10 พจน์แรกเป็น 3069 และมีอัตราส่วนร่วมเป็น 2 แล้วพจน์ที่ 3 ของอนุกรมนี้เท่ากับข้อใด

- 1) 2 2) 6 3) 8 4) 12 5) 24

25. ผลบวก 3 พจน์แรกของลำดับ $a_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{n+1}$ เท่ากับข้อใด

- 1) $-\frac{7}{12}$ 2) $-\frac{5}{12}$ 3) $\frac{7}{12}$ 4) $\frac{11}{12}$ 5) $\frac{13}{12}$

26. เกษตรกรคนหนึ่งซื้อรถกระบะโดยผ่อนชำระเป็นเวลา 4 ปี ทางผู้ขายกำหนดให้ผ่อนชำระเดือนแรก 5,500 บาท และเดือนถัด ๆ ไปให้ผ่อนชำระเพิ่มขึ้นทุกเดือน ๆ ละ 400 บาท จนครบกำหนด ถ้า x คือจำนวนเงินที่เขาต้องชำระในเดือนสุดท้าย และ y คือจำนวนเงินที่เขาชำระไปใน 2 ปีแรก (หน่วย : บาท) แล้วข้อใดถูก

- 1) $x = 24,300$ และ $y = 242,300$ 2) $x = 24,300$ และ $y = 242,400$
 3) $x = 24,400$ และ $y = 242,400$ 3) $x = 24,400$ และ $y = 243,900$
 5) $x = 24,900$ และ $y = 243,900$

27. ในการจัดคน 4 คนนั่งเป็นวงกลม ถ้าใน 4 คนนี้มีฝาแฝด 1 คู่ ความน่าจะเป็นที่ฝาแฝดจะได้นั่งติดกันเท่ากับข้อใด

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{2}$

4) $\frac{2}{3}$

5) $\frac{3}{4}$

28. ในปี พ.ศ. 2557 ประเทศไทยมีความน่าจะเป็นที่จะประสบภาวะน้ำท่วมเท่ากับ $\frac{3}{11}$ และความน่าจะเป็นที่จะ

ประสบภัยแล้งเท่ากับ $\frac{1}{3}$ ถ้าความน่าจะเป็นที่จะประสบภาวะน้ำท่วมหรือภัยแล้งเท่ากับ $\frac{6}{11}$

แล้วความน่าจะเป็นที่ประเทศไทยจะประสบทั้งภาวะน้ำท่วมและภัยแล้งในปี พ.ศ. 2557 เท่ากับข้อใด

1) $\frac{1}{33}$

2) $\frac{2}{33}$

3) $\frac{1}{11}$

4) $\frac{2}{11}$

5) $\frac{3}{11}$

29. ค่ากลางของข้อมูลในข้อใดมีความเหมาะสมที่จะใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลของกลุ่ม

1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักตัวของชาวจังหวัดเชียงใหม่

2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนหน้าของหนังสือที่คนไทยแต่ละคนอ่านในปี พ.ศ. 2554

3) มัธยฐานของจำนวนเงินที่แต่ละคนใช้จ่ายต่อเดือนของคนไทย

4) ฐานนิยมของความสูงของนักเรียนห้องหนึ่ง

5) ค่าเฉลี่ยของฐานนิยมกับมัธยฐานของคะแนนสอบของนักเรียนทั้งโรงเรียน

30. ข้อใดไม่อยู่ในขั้นตอนของการสำรวจความคิดเห็น

1) กำหนดขอบเขตของการสำรวจ

2) กำหนดวิธีเลือกตัวอย่าง

3) สร้างแบบสำรวจความคิดเห็น

4) ประมวลผลและวิเคราะห์ผลการสำรวจ

5) เผยแพร่ผลการสำรวจความคิดเห็น

31. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 11 จำนวน ดังนี้ 15, 10, 12, 15, 16, x, 16, 19, 13, 17, 15 ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 15 แล้ว กำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใด

1) 6.4

2) 4.9

3) 3.6

4) 2.6

5) 1.8

32. ในการสำรวจน้ำหนักตัวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ซึ่งมี 3 ห้อง มีจำนวนนักเรียน 44, 46 และ 42 คน ตามลำดับ ปรากฏว่ามีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 50 กิโลกรัม แต่พบว่าเครื่องชั่งที่ใช้สำหรับนักเรียนห้องแรก มีความคลาดเคลื่อนทำให้ชั่งน้ำหนักได้ตัวเลขสูงเกินจริงคนละ 1 กิโลกรัม ดังนั้นค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ถูกต้องของน้ำหนักตัวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นี้เท่ากับกี่กิโลกรัม
- 1) 49 2) $49\frac{1}{3}$ 3) $49\frac{1}{2}$ 4) $49\frac{2}{3}$ 5) $49\frac{3}{4}$

ตอนที่ 2 แบบเติมคำตอบ ข้อละ 2.5 คะแนน

33. จำนวนเต็มที่สุดคัล้องกับอสมการ $|x-3| \leq 4$ มีกี่จำนวน

34. ในการสำรวจความชอบรับประทานกล้วยเตี่ยว, ข้าวมันไก่ และข้าวหมูแดง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 100 คน ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง พบว่ามีนักเรียน

ชอบกล้วยเตี่ยว	49 คน	ชอบกล้วยเตี่ยวและข้าวมันไก่	22 คน
ชอบข้าวมันไก่	48 คน	ชอบกล้วยเตี่ยวและข้าวหมูแดง	32 คน
ชอบข้าวหมูแดง	59 คน	ชอบข้าวมันไก่และข้าวหมูแดง	27 คน
และชอบทั้งสามอย่าง	15 คน		

จำนวนนักเรียนที่ไม่ชอบอาหารทั้งสามชนิดนี้เท่ากับกี่คน

35. โรงพิมพ์แห่งหนึ่งคิดค่าจ้างในการพิมพ์แผ่นพับแยกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่หนึ่งเป็นค่าเรียงพิมพ์ ซึ่งไม่ขึ้นกับจำนวนแผ่นพับที่พิมพ์ กับส่วนที่สองเป็นค่าพิมพ์ ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนแผ่นพับที่พิมพ์ โดยโรงพิมพ์เสนอราคาดังนี้

ถ้าสั่งพิมพ์ 100 ใบ จะคิดค่าจ้างรวมทั้งหมดเป็นเงิน 800 บาท

และถ้าสั่งพิมพ์ 200 ใบ จะคิดค่าจ้างรวมทั้งหมดเป็นเงิน 1,100 บาท

โรงพิมพ์คิดค่าเรียงกี่บาท

36. พี่มีเงินมากกว่าน้อง 120 บาท ถ้าทั้งสองคนมีเงินรวมกันไม่เกิน 1,240 บาท แล้ว พี่มีเงินมากที่สุดได้กี่บาท

37. ขวดโหลใบหนึ่งบรรจุลูกแก้วสีแดง 6 ลูก สีเขียว 3 ลูก และสีเหลือง 1 ลูก หยิบลูกแก้วออกมา 2 ลูกพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้วที่มีสีต่างกันเท่ากับเท่าใด

38. ถ้าพจน์ที่ 4 และพจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิตเป็น 54 และ 1458 ตามลำดับ พจน์แรกเท่ากับเท่าใด

39. คะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งจำนวน 119 คน เป็นดังนี้

คะแนนที่ได้	จำนวนนักเรียน (คน)
52	13
55	12
57	17
60	9
62	10
65	6
70	14
75	14
78	7
80	10
82	7

คะแนนที่เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 56 เท่ากับเท่าใด

40. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 50 คน มีตารางแจกแจงความถี่ดังนี้

ช่วงคะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)
1-20	3
21-40	5
41-60	13
61-80	20
81-100	9

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบนี้เท่ากับเท่าใด

เฉลย

1. 5)	9. 4)	17. 1)	25. 3)	33. 9
2. 1)	10. 1)	18. 3)	26. 2)	34. 10
3. 5)	11. 5)	19. 1)	27. 4)	35. 500
4. 4)	12. 1)	20. 3)	28. 2)	36. 680
5. 2)	13. 3)	21. 3)	29. 2)	37. 0.6
6. 5)	14. 5)	22. 3)	30. 5)	38. 2
7. 2)	15. 2)	23. 2)	31. (5.8)	39. 66
8. 1)	16. 3)	24. 4)	32. 4)	40. 61.3